Grafos – Representação

Agora iremos implementar o TAD grafo com representação encadeada com a estrutura e operações a seguir:

```
typedef struct _nodetype {
   int info;
   struct _nodetype *point;
   struct _nodetype *next;
} nodetype;
typedef nodetype *TADgraph;
```

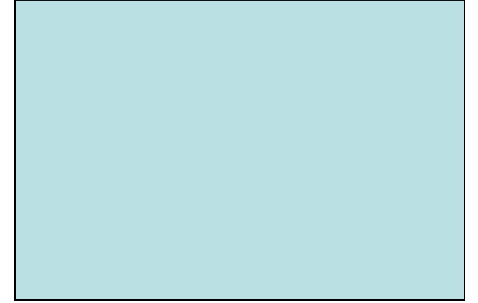
Grafos – Representação

Implemente as operações a seguir sobre o TAD apresentado no slide anterior.

```
void inicializaGrafo(TADgraph *);
void joinwt (nodetype *, nodetype *, int);
void join (nodetype *, nodetype *);
void remvwt (nodetype *, nodetype *, int);
void remv (nodetype *, nodetype *);
char adjacent (nodetype *, nodetype *);
nodetype *findnode (TADgraph, int);
nodetype *addnode (TADgraph*, int);
int remvnode(TADgraph *, nodetype *);
```

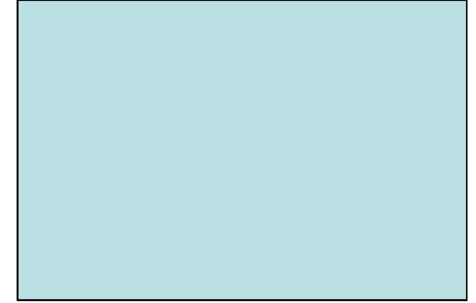
UNIVASF

```
void inicializaGrafo(int *grafo, listaDeNodos node)
{
  int i;
  for (i=0; i<MAXNODES; i++)
    node[i].livre = 1;
  *grafo = -1;
}
```

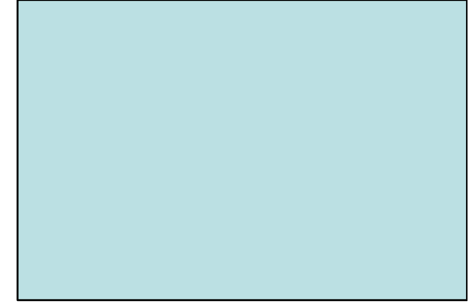


```
void inicializaGrafo(TADgraph *grafo)
{
  *grafo = NULL;
}
```

```
void joinwt (listaDeNodos node, int *listaDeNodosVazios, int p,
int q, int wt) {
  int r, r2;
  r2 = -1;
  r = node[p].point;
  while (r >= 0 && node[r].point != q) {
    r2 = r;
    r = node[r].next;
  }
  if (r >= 0) {
    node[r].info = wt;
    return;
  }
  r = getnode(listaDeNodosVazios, node);
  node[r].point = q;
  node[r].next = -1;
  node[r].info = wt;
  (r2 < 0 ) ? (node[p].point = r) : (node[r2].next = r);
}
```

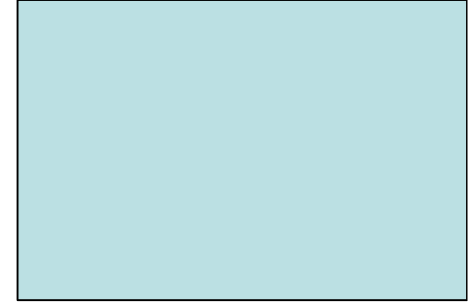


```
void joinwt (nodetype *p, nodetype *q, int wt) {
  nodetype * r, *r2;
  r2 = NULL;
  r = p->point;
  while (r && r->point != q) {
    r2 = r;
    r = r->next;
  }
  if (r) {
    r->info = wt;
    return;
  }
  if (!(r = (nodetype *) malloc (sizeof(nodetype)))) exit(1);
  r->point = q;
  r->next = NULL;
  r->info = wt;
  (!r2) ? (p->point = r) : (r2->next = r);
}
```



UNIVASF

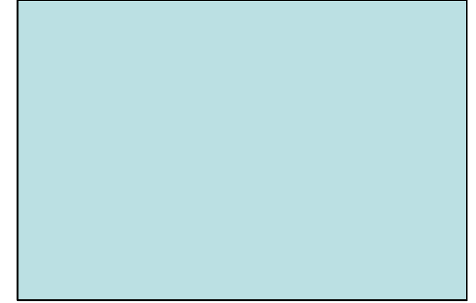
```
void join (listaDeNodos node, int *listaDeNodosVazios,
int p, int q){
  int r, r2;
  r2 = -1;
  r = node[p].point;
  while (r >= 0 && node[r].point != q) {
    r2 = r;
    r = node[r].next;
  }
  if (r >= 0) {
    return;
  }
  r = getnode(listaDeNodosVazios, node);
  node[r].point = q;
  node[r].next = -1;
  (r2 < 0 ) ? (node[p].point = r) : (node[r2].next = r);
}
```



```
void join (nodetype *p, nodetype *q)
{
   nodetype * r, *r2;
   r2 = NULL;
   r = p->point;
   while (r && r->point != q)
   {
      r2 = r;
      r = r->next;
   }
   if (r)
      return;
   if (!(r = (nodetype *) malloc (sizeof(nodetype)))) exit(1);
   r->point = q;
   r->next = NULL;
   (!r2) ? (p->point = r) : (r2->next = r);
}
```

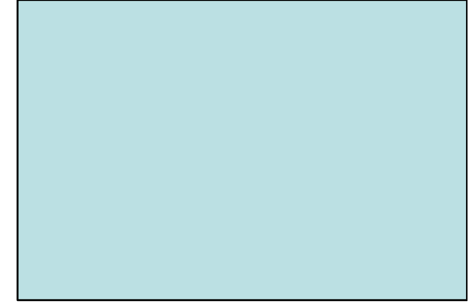
```
void remv (listaDeNodos node, int *listaDeNodosVazios, int p,
int q) {
  int r , r2;
  r2 = -1 ;
  r = node[p].point;
  while (r >= 0 && node[r].point != q) {
    r2 = r;
    r = node[r].next;
  }
  if (r >= 0) {
    /* r aponta para um arco de node[p] para node[q] */
    if (r2 < 0)
      node[p].point = node[r].next;
    else
      node[r2].next = node[r].next;
    freenode(listaDeNodosVazios, node, r);
    return;
  } /* na inexistência de um arco, nenhuma ação precisa ser tomada */
}
```

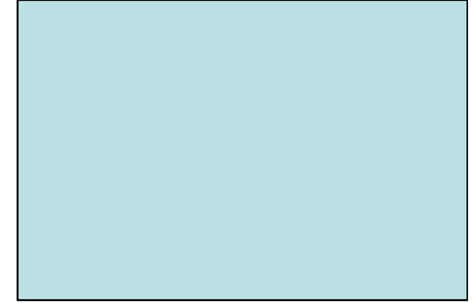
```
void remv (nodetype *p, nodetype *q) {
   nodetype *r , *r2;
   r2 = NULL ;
   r = p->point;
   while (r && r->point != q) {
      r2 = r;
      r = r->next;
   }
   if (r) {
      if (!r2)
         p->point = r->next;
      else
         r2->next = r->next;
      free(r);
      return;
   }
}
```



```
void remvwt (listaDeNodos node, int *listaDeNodosVazios, int p,
int q, int x) {
   int r , r2;
   r2 = -1 ;
   r = node[p].point;
   while (r >= 0 && node[r].point != q) {
      r2 = r;
      r = node[r].next;
   }
   if (r >= 0) {
      /* r aponta para um arco de node[p] para node[q] */
      if (r2 < 0)
         node[p].point = node[r].next;
      else
         node[r2].next = node[r].next;
      node[r].info = x;
      freenode(listaDeNodosVazios, node, r);
   }
   /*na inexistência de um arco, nenhuma ação precisa ser tomada*/
}
```

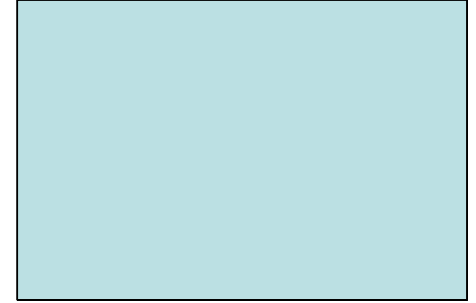
```
void remvwt (nodetype *p, nodetype *q, int x) {
  nodetype *r , *r2;
  r2 = NULL ;
  r = p->point;
  while (r && r->point != q) {
    r2 = r;
    r = r->next;
  }
  if (r) {
    if (!r2)
      p->point = r->next;
    else
      r2->next = r->next;
    r->info = x;
    free(r);
    return;
  }
}
```



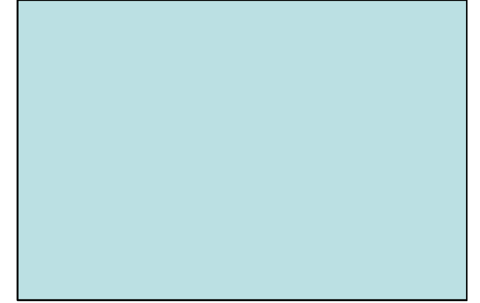


```
char adjacent (listaDeNodos node, int p, int q) {
   int r;
   r = node[p].point;
   while (r >= 0)
      if (node[r].point == q)
         return(1);
      else
         r = node[r].next ;
   return (0);
}
char adjacent (nodetype *p, nodetype *q) {
   nodetype *r;
   r = p->point;
   while (r)
      if (r->point == q)
         return(1);
      else
         r = r->next ;
   return (0);
}
```

```
int findnode (listaDeNodos node, int graph, int x) {
   int p;
   p = graph;
   while (p >= 0)
      if (node[p].info == x)
         return(p);
      else
         p = node[p].next;
      return (-1);
}
nodetype *findnode (TADgraph graph, int x) {
   nodetype * p;
   p = graph;
   while (p)
      if (p->info == x)
         return(p);
      else
         p = p->next;
      return (NULL);
}
```

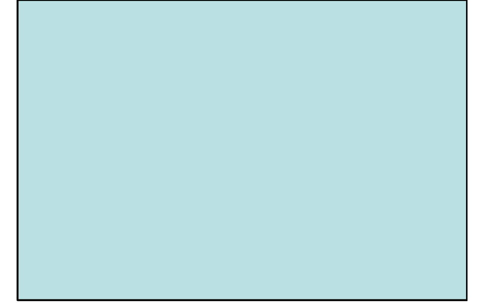


UNIVASF

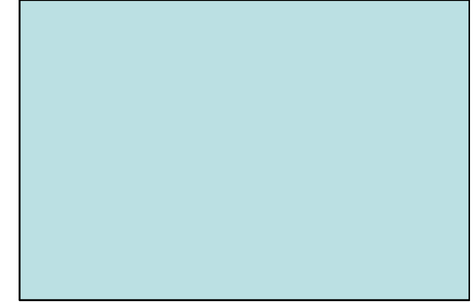


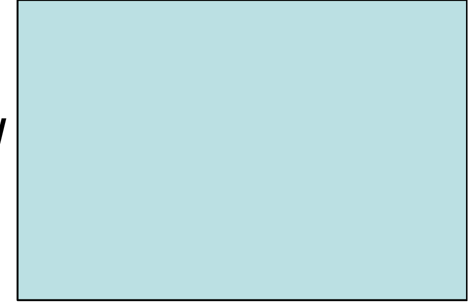
```
int addnode (listaDeNodos node,
int *listaDeNodosVazios, int* pgraph, int x) {
   int p;
   p = getnode(listaDeNodosVazios, node);
   node[p].info = x;
   node[p].point = -1;
   node[p].next = *pgraph;
   *pgraph = p;
   return (p);
}
```

```
nodetype *addnode (TADgraph* pgraph, int x) {
  TADgraph p;
  if (!(p = (TADgraph) malloc (sizeof(nodetype))))
    exit(1);
  p->info = x;
  p->point = NULL;
  p->next = *pgraph;
  *pgraph = p;
  return (p);
}
```



```
int remvnode(int *listaDeNodosVazios, listaDeNodos node,
int *graph, int p) {
  int i;
  int nodoAtual, nodoAnterior, retorno = 0;
  nodoAtual = nodoAnterior = *graph;
  while (nodoAtual >= 0) {
    if (nodoAtual == p)
    {/*remover todas as arestas com origem em vértice e o próprio vértice*/
      int nodoAux, nodoAux2;
      if (nodoAtual == *graph) /*eliminado vértice do conjunto de vértices*/
        *graph = node[*graph].next;
      else
        node[nodoAnterior].next = node[nodoAtual].next;
      nodoAux = node[nodoAtual].point;
      while (nodoAux >= 0) {
        nodoAux2 = nodoAux;
        nodoAux = node[nodoAux].next;
        freenode(listaDeNodosVazios, node, nodoAux2);/*eliminado arestas*/
      }
```

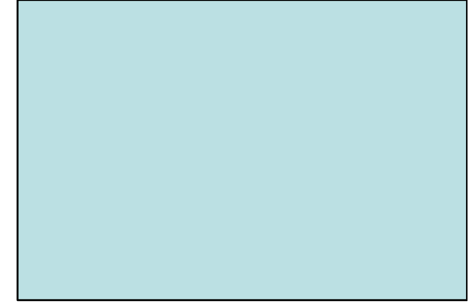




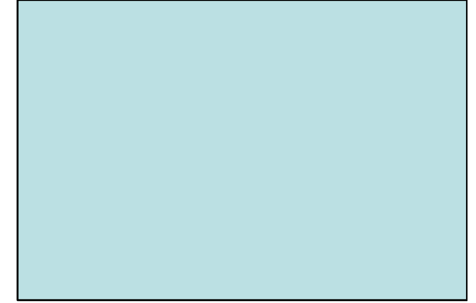
```
    nodoAnterior = nodoAtual;
    nodoAtual = node[nodoAtual].next;
    freenode(listaDeNodosVazios, node, p); /*eliminando vértice*/
    retorno = 1;
  }
  else
  {/*remover as arestas que levam ao vértice sendo removido, caso existam*/
    int auxAnterior, auxAtual, nodeAux;
    auxAnterior = auxAtual = node[nodoAtual].point;
    while (auxAtual >=0) {
      if (node[auxAtual].point == p) {
        if (auxAtual == auxAnterior)
          node[nodoAtual].point = node[auxAtual].next;
        else
          node[auxAnterior].next = node[auxAtual].next;
        nodeAux = auxAtual;
        auxAnterior = auxAtual;
        auxAtual = node[auxAtual].next;
        freenode(listaDeNodosVazios, node, nodeAux);
      }
```

UNIVASF

```
        else {
            auxAnterior = auxAtual;
            auxAtual = node[auxAtual].next;
        }
      }
      nodoAnterior = nodoAtual;
      nodoAtual = node[nodoAtual].next;
    }
  }
  return (retorno);
}
```



```
int remvnode(TADgraph *graph, nodetype *p) {
  int retorno = 0;
  nodetype *nodoAtual, *nodoAnterior;
  nodoAtual = nodoAnterior = *graph;
  while (nodoAtual) {
    if (nodoAtual == p)
    {/*remover todas as arestas com origem em vértice e o próprio vértice*/
      nodetype *nodoAux, *nodoAux2;
      if (nodoAtual == *graph) /*eliminado vértice do conjunto de vértices*/
        *graph = (*graph)->next;
      else
        nodoAnterior->next = nodoAtual->next;
      nodoAux = nodoAtual->point;
      while (nodoAux) {
        nodoAux2 = nodoAux;
        nodoAux = nodoAux->next;
        free(nodoAux2);/*eliminado arestas*/
      }
```



```
    nodoAnterior = nodoAtual;
    nodoAtual = nodoAtual->next;
    free(p); /*eliminando vértice*/
    retorno = 1;
  }
  else
  {/*remover as arestas que levam ao vértice sendo removido, caso existam*/
    nodetype *auxAnterior, *auxAtual, *nodeAux;
    auxAnterior = auxAtual = nodoAtual->point;
    while (auxAtual) {
      if (auxAtual->point == p) {
        if (auxAtual == auxAnterior)
          nodoAtual->point = auxAtual->next;
        else
          auxAnterior->next = auxAtual->next;
        nodeAux = auxAtual;
        auxAnterior = auxAtual;
        auxAtual = auxAtual->next;
        free(nodeAux);
      }
```

```
        else {
            auxAnterior = auxAtual;
            auxAtual = auxAtual->next;
        }
      }
      nodoAnterior = nodoAtual;
      nodoAtual = nodoAtual->next;
    }
  }
  return (retorno);
}
```

Grafos – Busca em largura

A busca em largura é um dos algoritmos mais simples para se pesquisar um grafo e é arquétipo de muitos algoritmos de grafos importantes.

O algoritmo de caminhos mais curtos de origem única de Dijkstra e o algoritmo de árvore espalhada mínima de Prim utilizam ideias semelhantes às que aparecem na busca em largura.

A busca em largura baseia-se em partindo de um determinado vértice ***s*** (origem) explorar sistematicamente as arestas do grafo determinando cada vértice acessível a partir de ***s***.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

O algoritmo calcula a distância (menor número de arestas) desde ***s*** até todos os vértices acessíveis partindo do mesmo.

Ele também produz uma "árvore primeiro na extensão" com raiz ***s*** que contém todos os vértices acessíveis. Para qualquer vértice acessível ***v*** a partir de ***s***, o caminho na árvore primeiro na extensão de ***s*** até ***v*** corresponde a um "caminho mais curto" de ***s*** até ***v*** em **G** (grafo), ou seja, um caminho que contém o número mínimo de arestas.

O algoritmo funciona sobre grafos orientados e também não orientados.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Para controlar o andamento, a busca em largura pinta cada vértice de branco, cinza ou preto.

No início, todos os vértices são brancos, e mais tarde eles podem se tornar acinzentadas e depois pretos.

Um vértice é descoberto na primeira vez em que é encontrado durante a pesquisa, e nesse momento ele se torna não branco. Portanto, vértices em cor cinza e preta foram descobertos, mas a busca em largura faz distinção entre eles para assegurar que a pesquisa continuará de maneira a seguir primeiro na extensão.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Considerando um grafo **G** = (**V**, **E**). Se (**u**, **v**) $\in$ **E** e o vértice ***u*** é preto, então o vértice ***v*** é cinza ou preto; isto é, todos os vértices adjacentes a vértices pretos foram descobertos. Vértices de cor cinza podem ter alguns vértices adjacentes brancos; eles representam a fronteira entre vértices descobertos e não descobertos.

Sendo assim, a busca em largura constrói uma árvore primeiro na extensão, contendo inicialmente apenas sua raiz, a qual é o vértice de origem ***s***. Sempre que um vértice branco ***v*** é descoberto no curso da varredura da lista de adjacências de um vértice ***u*** já descoberto, o vértice ***v*** e a aresta (***u***, ***v***) são adicionados à árvore.

UNIVASF

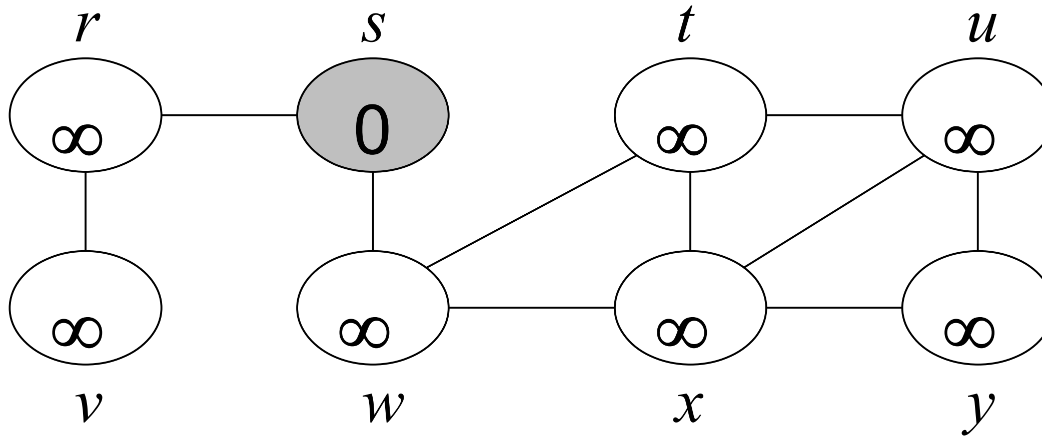
Grafos – Busca em largura

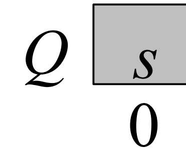
Dizemos que ***u*** é o predecessor ou pai de ***v*** na árvore primeiro na extensão. Tendo em vista que um vértice é descoberto no máximo uma vez, ele tem no máximo um pai. Relacionamentos de ancestral e descendente na árvore primeiro na extensão são definidos em relação à raiz ***s*** da maneira usual: se ***u*** está em um caminho na árvore a partir da raiz ***s*** até o vértice ***v***, então ***u*** é um ancestral de ***v***, e ***v*** é um descendente de ***u***.

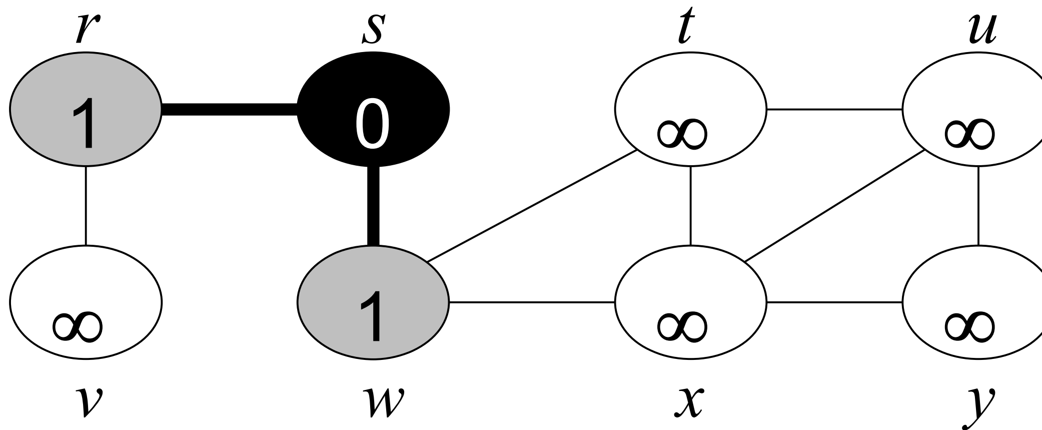
Para uma melhor compreensão vamos observar como ocorre este processo no grafo apresentado no próximo slide.

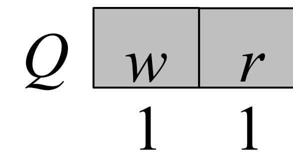
UNIVASF

Grafos – Busca em largura

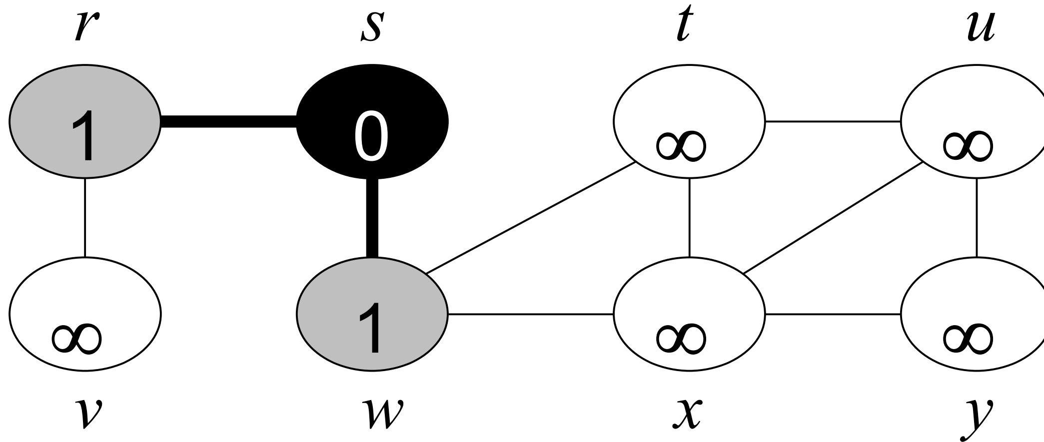


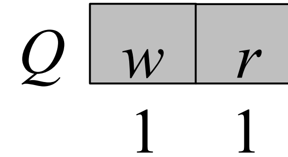


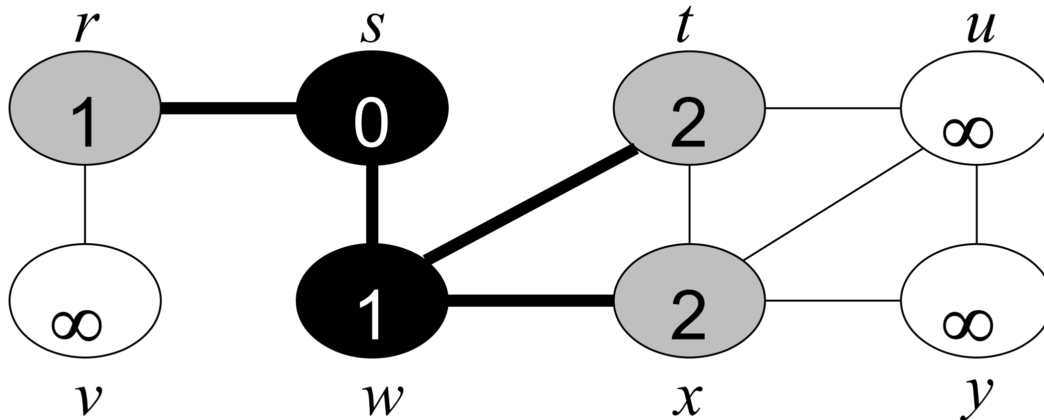


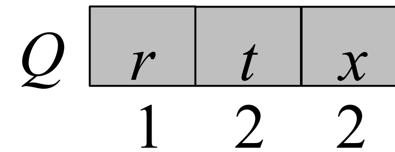


Grafos – Busca em largura

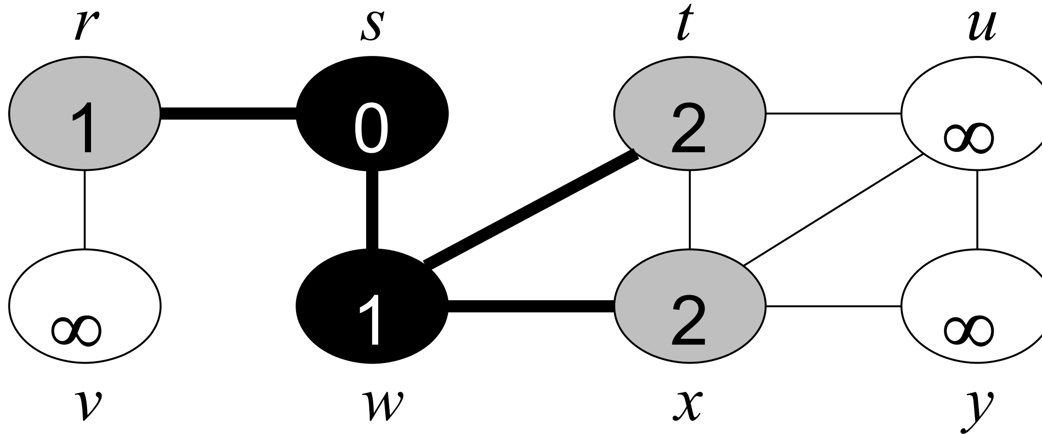




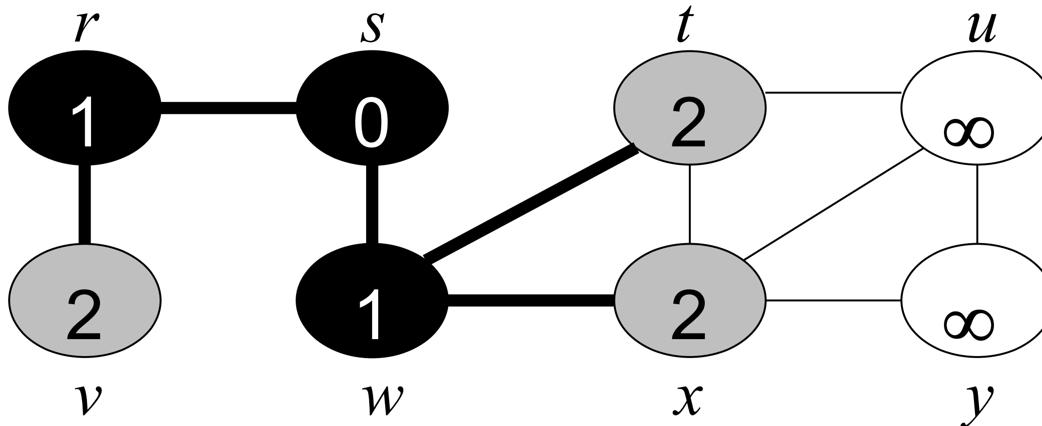




Grafos – Busca em largura



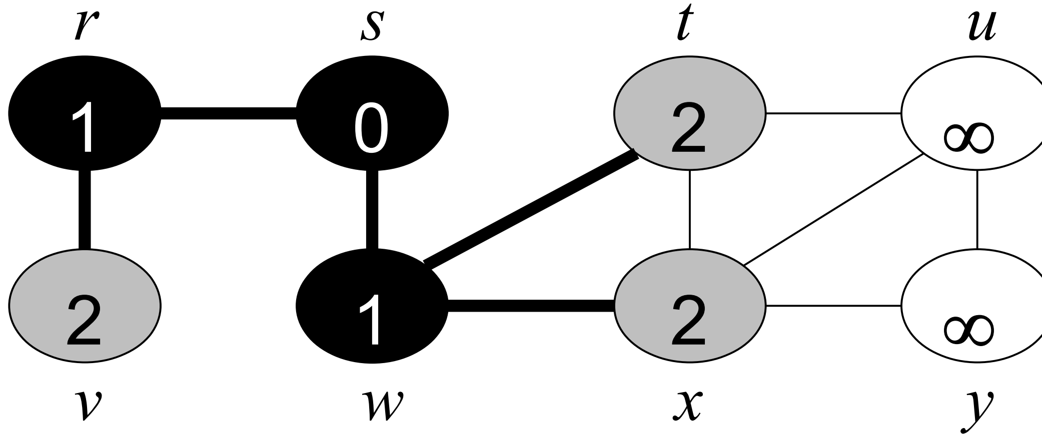
Q	r	t	x
	1	2	2



Q	t	x	v
	2	2	2

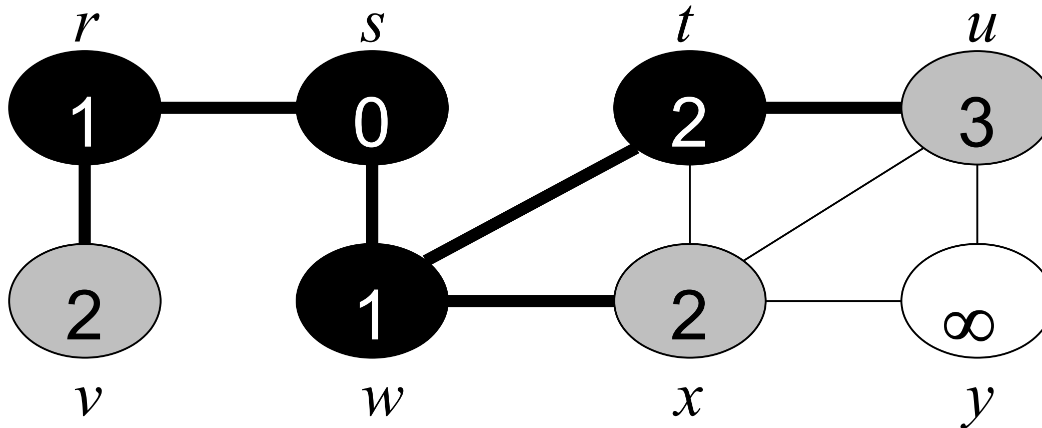
UNIVASF

Grafos – Busca em largura



Q

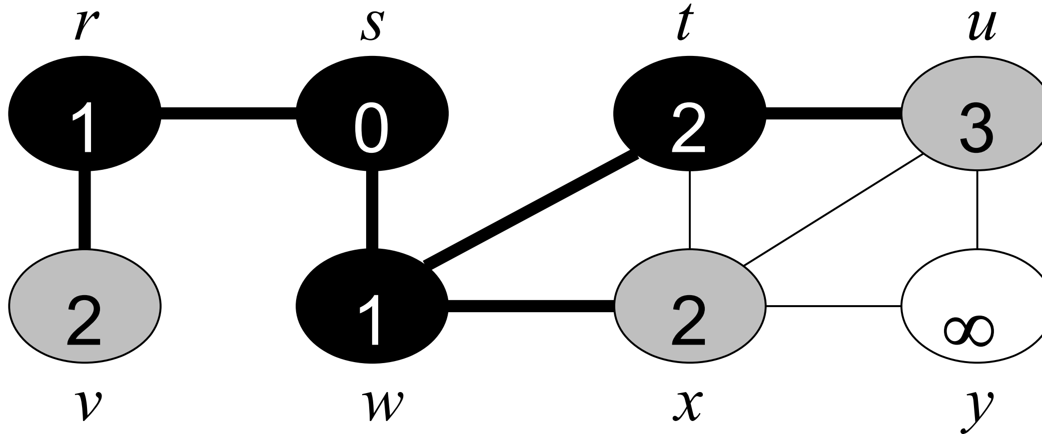
t	x	v
2	2	2



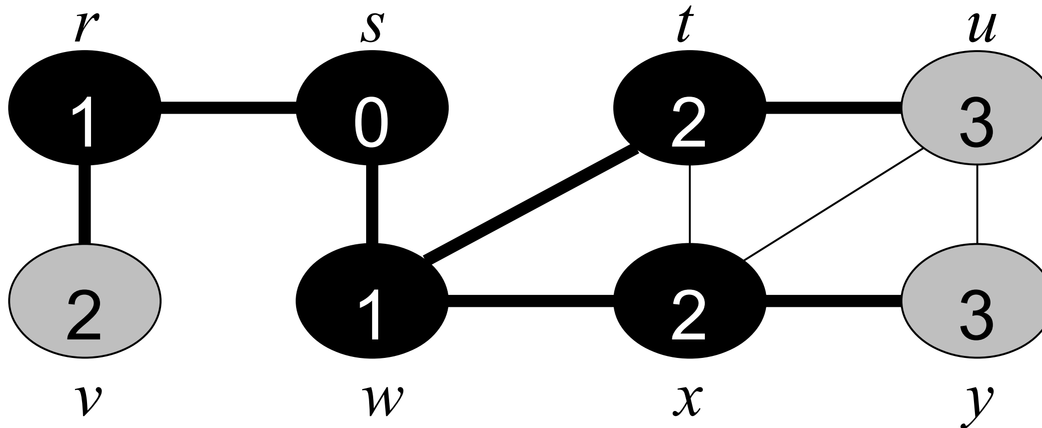
Q

x	v	u
2	2	3

Grafos – Busca em largura

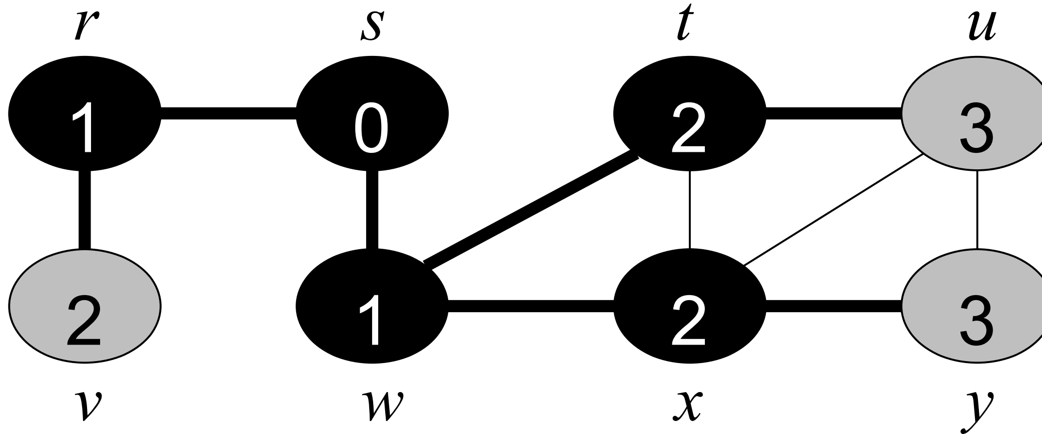


Q	x	v	u
	2	2	3



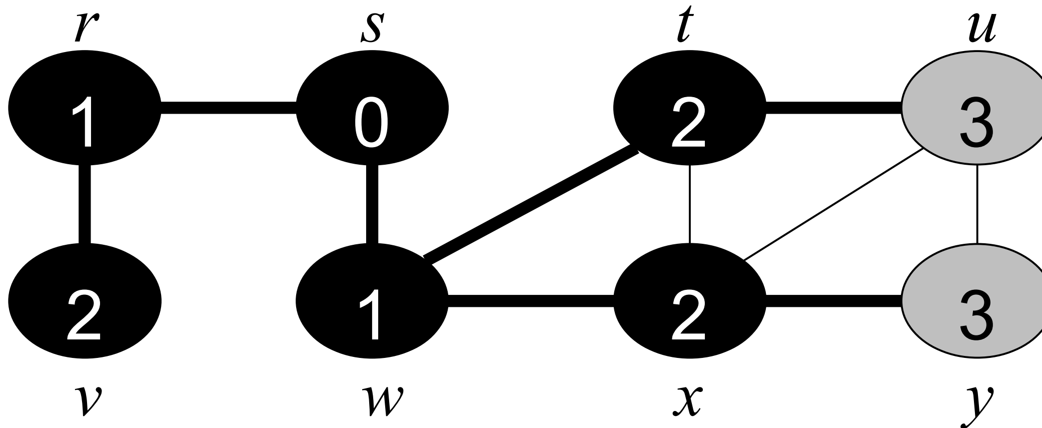
Q	v	u	y
	2	3	3

Grafos – Busca em largura



Q

v	u	y
2	3	3

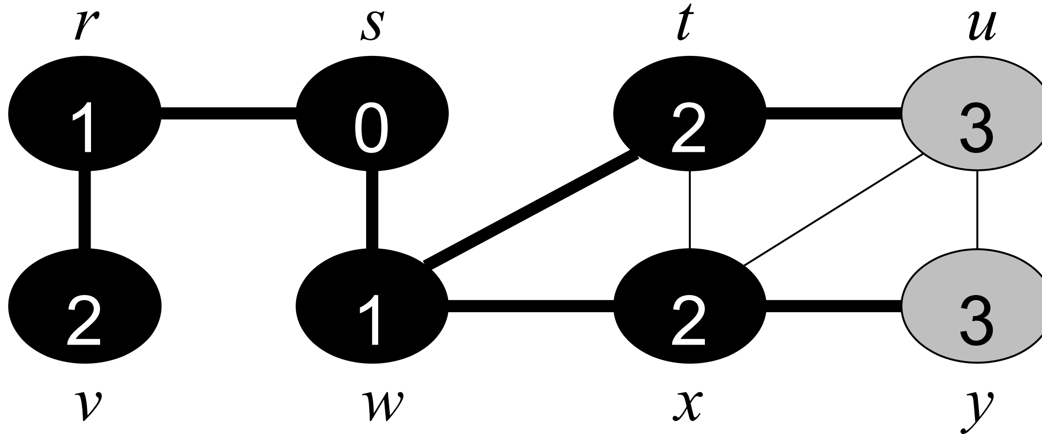


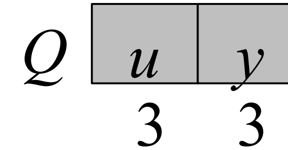
Q

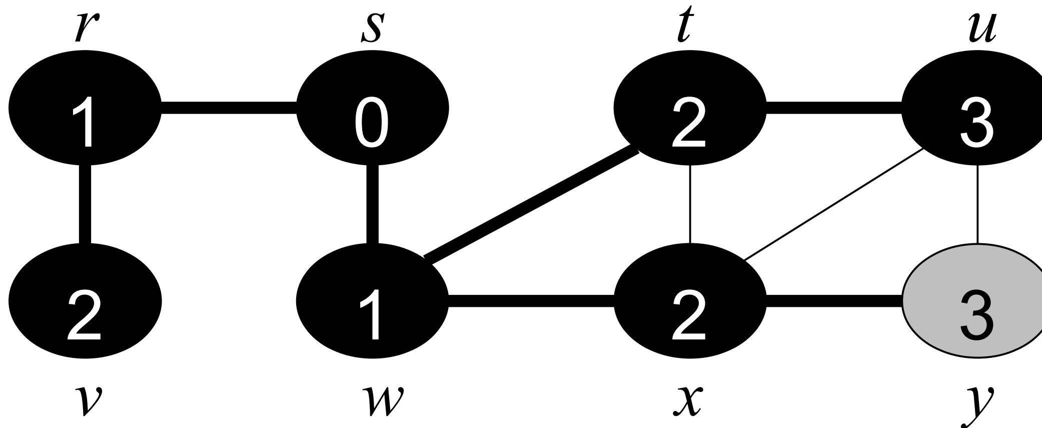
u	y
3	3

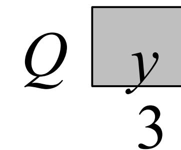
UNIVASF

Grafos – Busca em largura



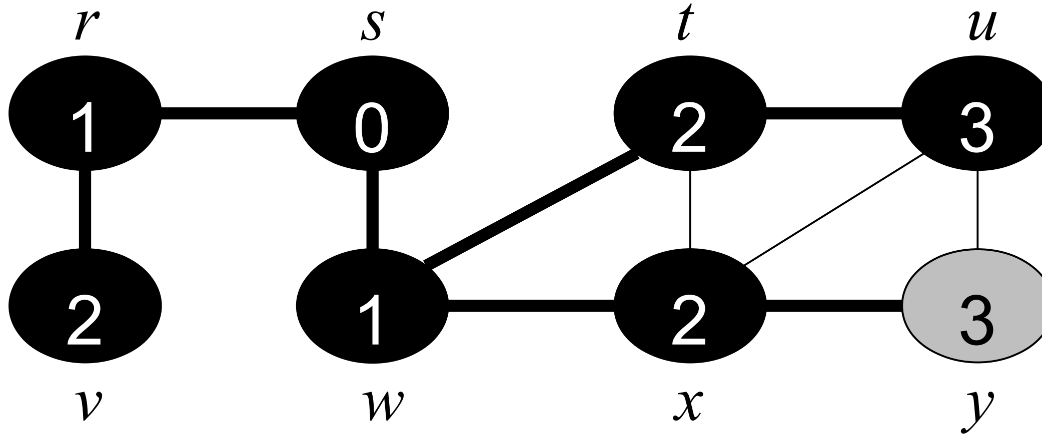




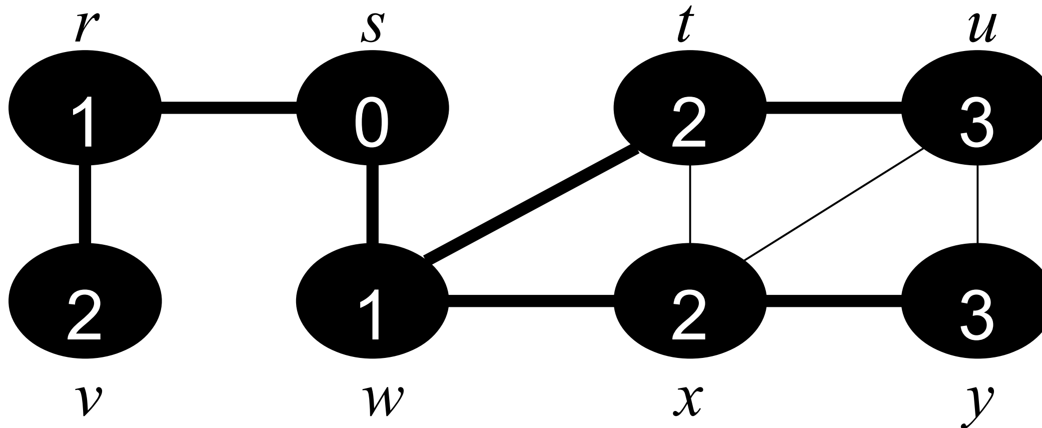


UNIVASF

Grafos – Busca em largura



Q | y |
|---|
| 3 |



$Q \quad \varnothing$

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Com base no que foi estudado, codifique uma função na linguagem C que implemente o procedimento de busca em largura discutido, pressuponha que o grafo de entrada **G** = (**V**, **E**) é representado com o uso de listas de adjacências (representação encadeada em vetor).

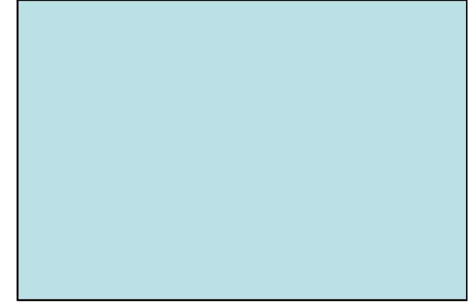
Dica: Mantenha estruturas de dados adicionais para armazenar informações relativas a cada vértice no grafo. A cor de cada vértice ***u*** $\in$ ***V*** pode ser armazenada na variável cor[***u***], e o predecessor de ***u*** pode ser armazenado na variável pai[***u***]. Se ***u*** não tem nenhum predecessor (por exemplo, se ***u*** = ***s*** ou se ***u*** não foi descoberto), então pai[***u***] = NULL. A distância desde a origem ***s*** até o vértice ***u*** calculada pelo algoritmo pode ser armazenada em d[***u***]. Para facilitar a implementação o algoritmo também pode se utilizar de uma fila ***Q*** (FIFO) para gerenciar o conjunto de vértices de cor cinza.

UNIVASF

```
BFS(G, s) /*Procedimento apresentado no livro Algoritmos, Cormen at all*/
1   for cada vértice u ∈ V[G] – {s}
2      do cor[u] <- BRANCO
3            d[u] <- ∞
4            pai[u] <- NULL
5   cor[s] <- CINZA
6   d[s] <- 0
7   pai[s] <- NULL
8   Q <- ∅
9   ENQUEUE(Q, s) /*Insere s na fila Q*/
10 while Q ≠ ∅
11do u <- DEQUEUE(Q) /*Consulta e remove o primeiro elemento da fila Q*/
12       for cada v <- Adj[u]
13       do if cor[v] = BRANCO
14             then cor[v] <-CINZA
15                    d[v] <- d[u] + 1
16                    pai[v] <- u
17                    ENQUEUE (Q, v)
18       cor[u] <- PRETO
```

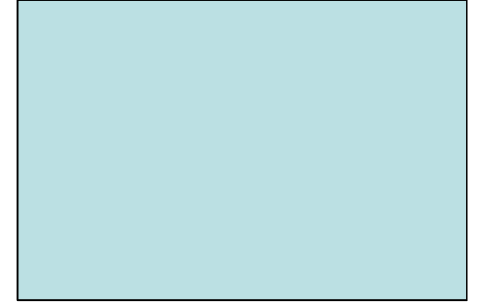
UNIVASF

```
/*TAD FILA*/
typedef struct {
  int indMemoria;
  int indInf;
}DADOS;
typedef struct nodo {
  DADOS inf;
  struct nodo * next;
}NODO;
typedef struct {
  NODO *INICIO;
  NODO *FIM;
}DESCRITOR;
typedef DESCRITOR * FILA_ENC;
void cria_fila (FILA_ENC *);
int eh_vazia (FILA_ENC);
void ins (FILA_ENC, DADOS);
DADOS cons (FILA_ENC);
void ret (FILA_ENC);
DADOS cons_ret (FILA_ENC);
```

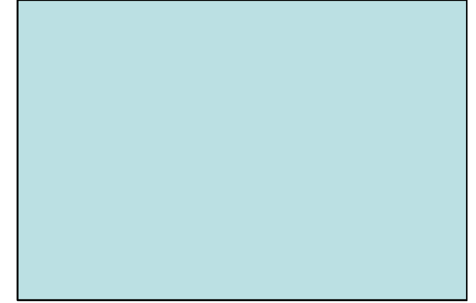


```
void buscaEmLargura(listaDeNodos node, int G, int s) {
  int u, *d=NULL, *pai=NULL, *vertice=NULL, numVertices=0, v, ind;
  char *cor=NULL; /*'B'=Branco, 'C'=Cinza e 'P'=Preto*/
  FILA_ENC Q;
  DADOS aux;
  u = G;
  while (u>=0) {
    ++numVertices;
    d = (int *) realloc(d, numVertices*sizeof(int));
    pai = (int *) realloc(pai, numVertices*sizeof(int));
    cor = (char *) realloc(cor, numVertices*sizeof(char));
    vertice = (int *) realloc(vertice, numVertices*sizeof(int));
   /*apesar de suprimida é necessária a verificação das alocações dinâmicas*/
    if (u != s) {
      cor[numVertices-1] = 'B';
      d[numVertices-1] = -1; /*-1 equivale a infinito*/
      pai[numVertices-1] = -1; /*-1 equivale a NULL*/
      vertice[numVertices-1] = node[u].info;
    }
```

UNIVASF



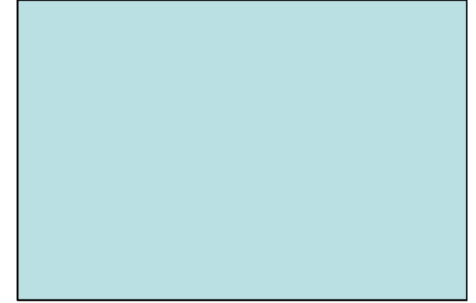
```
  else {
    ind = numVertices-1;
    cor[numVertices-1] = 'C';
    d[numVertices-1] = 0;
    pai[numVertices-1] = -1; /*-1 equivale a NULL*/
    vertice[numVertices-1] = node[u].info;
  }
  u = node[u].next;
}
cria_fila(&Q);
aux.indInf = s;
aux.indMemoria = ind;
ins(Q, aux); /*Insere s na fila Q*/
while (!eh_vazia(Q))
{
  aux = cons_ret(Q); /*Consulta e remove o primeiro elemento da fila Q*/
  u = aux.indInf;
  v = G;
  ind = -1;
```



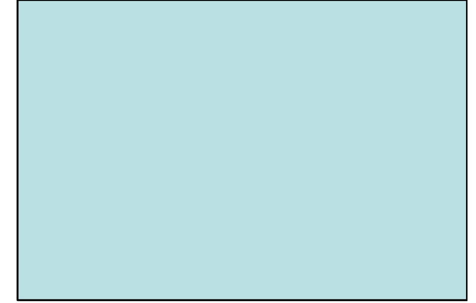
```
    while (v>=0) {
      ind++;
      if (adjacent (node, u, v)) {
        if (cor[ind] == 'B')
        {
          DADOS aux2;
          cor[ind] = 'C';
          d[ind] = d[aux.indMemoria] + 1;
          pai[ind] = u;
          aux2.indInf = v;
          aux2.indMemoria = ind;
          ins (Q, aux2);
        }
      }
      v = node[v].next;
    }
    cor[aux.indMemoria] = 'P';
  }
}
```

UNIVASF

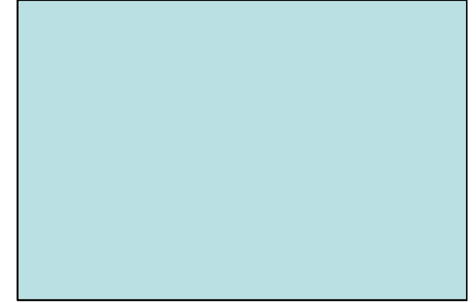
```
typedef struct nodetype {
   int info;
   int point ;
   int next;
   /*Dados necessários para a busca em largura*/
   char cor; /*'B'=Branco, 'C'=Cinza e 'P'=Preto*/
   int d;
   int pai;
   /******************************************/
}tipoNodo;
typedef tipoNodo listaDeNodos[MAXNODES];
```

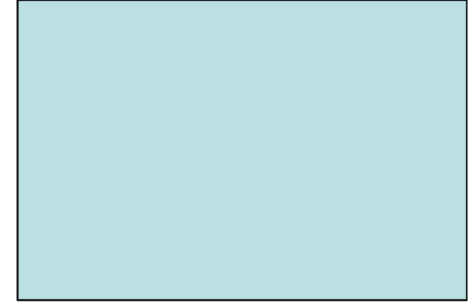


```
/*TAD FILA*/
typedef struct nodo
{
   int inf;
   struct nodo * next;
}NODO;
typedef struct
{
   NODO *INICIO;
   NODO *FIM;
}DESCRITOR;
typedef DESCRITOR * FILA_ENC;
void cria_fila (FILA_ENC *);
int eh_vazia (FILA_ENC);
void ins (FILA_ENC, int);
int cons (FILA_ENC);
void ret (FILA_ENC);
int cons_ret (FILA_ENC);
```



```
void buscaEmLargura(listaDeNodos node, int G, int s) {
  int u, v, ind;
  FILA_ENC Q;
  u = G;
  while (u>=0) {
    if (u != s)
    {
      node[u].cor = 'B';
      node[u].d = -1; /*-1 equivale a infinito*/
      node[u].pai = -1; /*-1 equivale a NULL*/
    }
    else
    {
      node[u].cor = 'C';
      node[u].d = 0;
      node[u].pai = -1; /*-1 equivale a NULL*/
    }
    u = node[u].next;
  }
```





```
  cria_fila(&Q);
  ins(Q, s); /*Insere s na fila Q*/
  while (!eh_vazia(Q)) {
    u = cons_ret(Q); /*Consulta e remove o primeiro elemento da fila Q*/
    v = node[u].point;
    while (v>=0)
    {
      if (node[node[v].point].cor == 'B')
      {
        node[node[v].point].cor = 'C';
        node[node[v].point].d = node[u].d + 1;
        node[node[v].point].pai = u;
        ins (Q, node[v].point);
      }
      v = node[v].next;
    }
    node[u].cor = 'P';
  }
}
```

Grafos – Busca em largura

Analisaremos agora o tempo de execução do algoritmo apresentado para implementar a busca em largura sobre um grafo de entrada **G** = (**V**, **E**).

A manipulação das cores assegura que cada vértice seja colocado na fila no máximo uma vez, e portanto é retirado da fila no máximo uma vez. As operações de enfileirar e desenfileirar demoram o tempo **O**(1), e assim o tempo total dedicado a operações de filas é **O**(**V**). Pelo fato da lista de adjacências de cada vértice ser examinada somente quando o vértice é desenfileirado, a lista de adjacências de cada vértice é examinada no máximo uma vez.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Tendo em vista que a soma dos comprimentos de todas as listas de adjacências é **O**(E), é gasto no máximo o tempo **O**(E) na varredura total das listas de adjacências. A sobrecarga correspondente à inicialização é **O**(V) e, desse modo, o tempo de execução total do algoritmo de busca em largura é **O**(V + E).

Assim, a pesquisa primeiro na extensão é executada em tempo linear no tamanho da representação de lista de adjacências de **G**.

Observação: Os resultados da busca em largura podem depender da ordem na qual os vizinhos de um determinado vértice são visitados; a árvore primeiro na extensão pode variar, mas as distância **d** calculadas pelo algoritmo não irão variar.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Como determinar o caminho mínimo (menor caminho) entre um vértice A e B?

Com a busca em largura!

Como?

Conforme foi anteriormente mencionado, o procedimento de busca em largura constrói uma árvore primeiro na extensão à medida que pesquisa o grafo. A árvore é representada pelo campo **pai** em cada vértice. Mais formalmente, para um grafo **G** = (**V**, **E**) com origem ***s***, definimos o **subgrafo predecessor** de **G** como:

$$G_{pai} = (V_{pai}, E_{pai}), \text{ onde}$$

$$V_{pai} = \{v \in V: pai[v] \neq NULL\} \cup \{s\} .$$

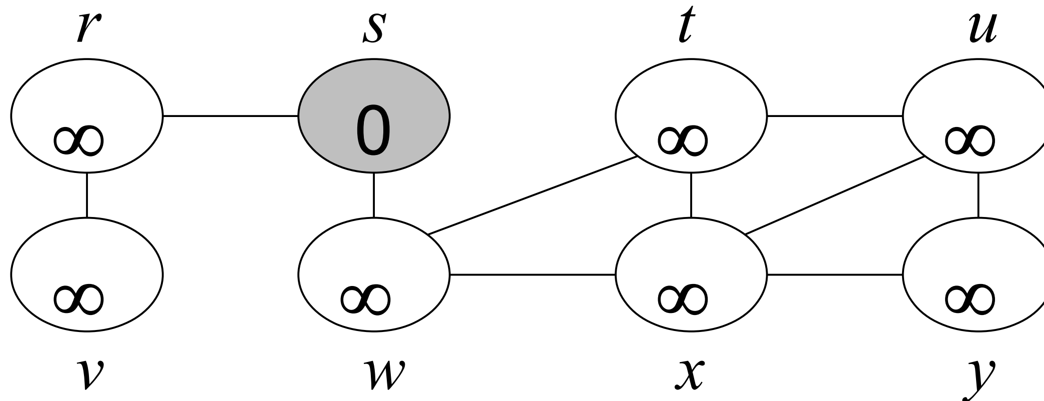
e

$$E_{pai} = \{\{(pai[v], v): v \in V_{pai} - \{s\}\}.$$

UNIVASF

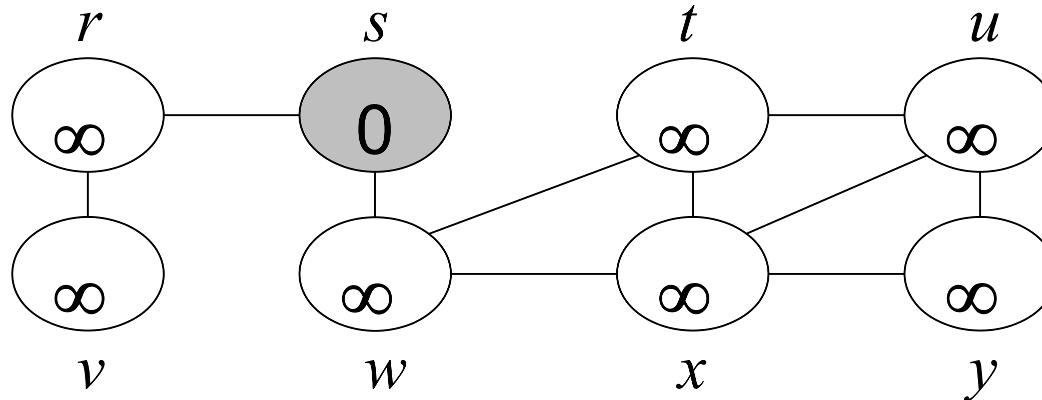
Grafos – Busca em largura

O subgrafo predecessor $\mathbf{G_{pai}}$ é uma **árvore primeiro na extensão** se $\mathbf{V_{pai}}$ consiste nos vértices acessíveis a partir de ***s*** e, para todo ***v*** $\in$ $\mathbf{V_{pai}}$ existe um caminho único simples desde ***s*** até ***v*** em $\mathbf{G_{pai}}$ que também é um caminho mais curto de ***s*** até ***v*** em **G**. As arestas em $\mathbf{E_{pai}}$ são chamadas arestas da árvore. Observe o grafo abaixo:



UNIVASF

Grafos – Busca em largura



A aplicação do algoritmo da busca em profundidade gera as seguintes informações nos respectivos campos:

Vértices: **{ y, x, w, v, u, t, s, r }**

Distâncias: **{ 3, 2, 1, 2, 3, 2, 0, 1 }**

Pais: **{ x, w, s, r, t, w, , s }**

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Com base no que foi apresentado implemente uma função, na linguagem C, que com base no resultado da busca em largura apresente o caminho mínimo de um vértice ***s*** para um vértice ***v***.

UNIVASF

Grafos – Busca em largura

Estudamos a determinação dos caminhos mais curtos para grafos não-ponderados. Porém, este processo pode ser generalizado passando a tratar situações em que cada aresta tem um valor de peso real e o peso de um caminho é a soma dos pesos de suas arestas constituintes.

Sob este prisma, os grafos considerados em nosso estudo são grafos não-ponderados ou, de modo equivalente, todas as arestas têm peso unitário.

UNIVASF