1

Funções e Modelos

Adptado e Revisado:
Prof. Lino Silva - UNIVASF

1.2

Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

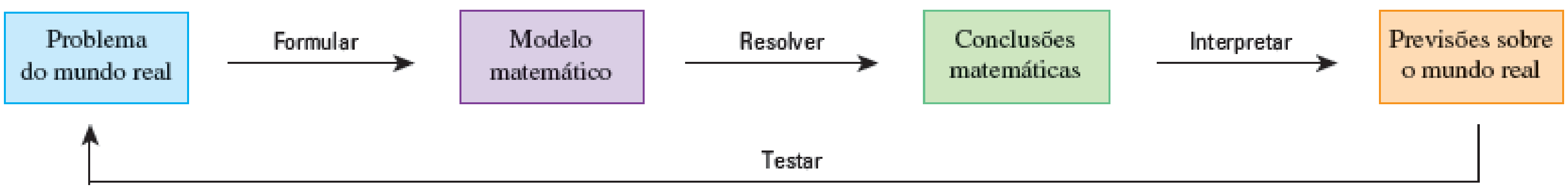
Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** é a descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real, como o tamanho de uma população, a demanda por um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo da redução de poluentes.

O propósito desses modelos é entender o fenômeno e talvez fazer previsões sobre seu comportamento futuro.

Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

A **Figura 1** ilustra o processo de modelagem matemática.



O processo de modelagem

Figura 1

Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

Um **modelo matemático** nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - **é uma *idealização***.

Um bom modelo **simplifica a realidade** o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas.

É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Modelos Matemáticos: Uma Lista de Funções Essenciais

Existem vários **tipos diferentes de funções** que podem ser usadas para modelar as relações observadas no mundo real.

A seguir, discutiremos o comportamento e os gráficos dessas funções e daremos exemplos de situações modeladas apropriadamente por elas.

Modelos Lineares

Modelos Lineares

Quando dizemos que ***y*** é uma **função linear** de ***x***, queremos dizer que o gráfico da função é uma reta.

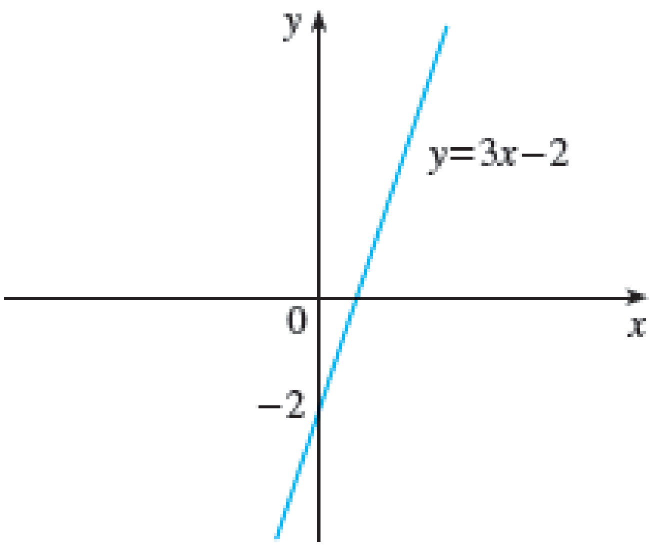
Assim, podemos usar a forma **inclinação-intersecção** da equação de uma reta para escrever uma fórmula para a função, como

$$y = \ = mx + b \quad ou \quad f(x) = mx + b$$

onde ***m*** é o **coeficiente angular** da reta e ***b*** é a **intersecção** com o eixo ***y***.

Modelos Lineares

Uma característica peculiar das funções lineares é que elas **variam a uma taxa constante**. Por exemplo, a **Figura 2** mostra o gráfico da função linear $f(x) = 3x - 2$ e uma tabela de valores amostrais.



x	$f(x) = 3x - 2$
1,0	1,0
1,1	1,3
1,2	1,6
1,3	1,9
1,4	2,2
1,5	2,5

Figura 2

Modelos Lineares

Note que sempre que ***x*** aumenta **0,1**, o valor de ***f*(*x*)** aumenta em **0,3**.

Então, ***f*(*x*)** aumenta **três vezes mais rápido** que ***x***.

Assim, a **inclinação** do gráfico ***y* = 3*x* – 2**, que é igual a 3, pode ser interpretada como a **taxa de mudança** de ***y*** com relação ao ***x***.

Exemplo 1

(a) À medida que o ar seco move-se para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for de 20 °C e a temperatura a uma altitude de 1 km for de 10 °C, expresse a temperatura *T* (em °C) como uma função da altitude *h* (em km), supondo que um modelo linear seja apropriado.

(b) Faça um gráfico da função na parte (a). O que a inclinação representa?

(c) Qual é a temperatura a 2,5 km de altura?

Exemplo 1(a) – *Solução*

Como estamos supondo que T é uma **função linear** de h, podemos escrever

$$T = mh + b$$

Também nos é dado que $T = 20$ quando $h = 0$, então

$$20 = m \cdot 0 + b = b$$

Em outras palavras, a **intersecção** com o eixo y é $b = 20$.

Exemplo 1(a) – *Solução*

Também nos é dado que ***T* = 10** quando ***h* = 1**, então

$$10 = m \bullet 1 + 20$$

Logo, a **inclinação da reta** é $m = 10 - 20 = -10$.

Portanto, a **função linear** procurada é

$$\boldsymbol{T = -10h + 20}$$

Exemplo 1(b) – *Solução*

continuação

O gráfico é esboçado na **Figura 3**. A inclinação é igual a $m = -10°\text{C/km}$ e representa a **taxa de variação** da temperatura em relação à altura.

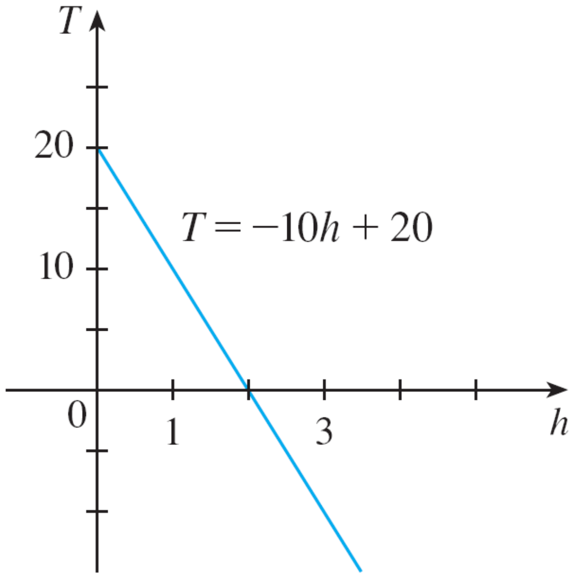


Figura 3

A uma altitude de h = 2,5 km, a temperatura é

$T = -10(2.5) + 20 = \mathbf{-5°C}$

Modelos Lineares

Se não existir uma lei física ou princípio que nos ajude a formular o modelo, construímos um **modelo empírico**, inteiramente baseado em dados coletados.

Procuramos uma curva que se ajuste aos dados, no sentido de que ela capte a tendência dos pontos dados.

Polinômios

Polinômios

Uma função ***P*** é denominada **polinômio** se

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

onde ***n*** é um inteiro não negativo e os números

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$$

são constantes chamadas **coeficientes** do polinômio.

O **domínio** de qualquer polinômio é $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$.

Polinômios

Se o coeficiente dominante $a_n \neq 0$, então o **grau** do polinômio é *n*.

Por exemplo, a função

$$P(x) = 2x^6 - x^4 + \frac{2}{5}x^3 + \sqrt{2}$$

é um polinômio de **grau 6**.

Polinômios

Função Polinomial do Primeiro Grau

Um **polinômio de grau 1** é da forma $P(x) = mx + b$.

Portanto, a função $P(\mathbf{x}) = \boldsymbol{mx + b}$ é uma **função linear**.

Função Polinomial do Segundo Primeiro Grau

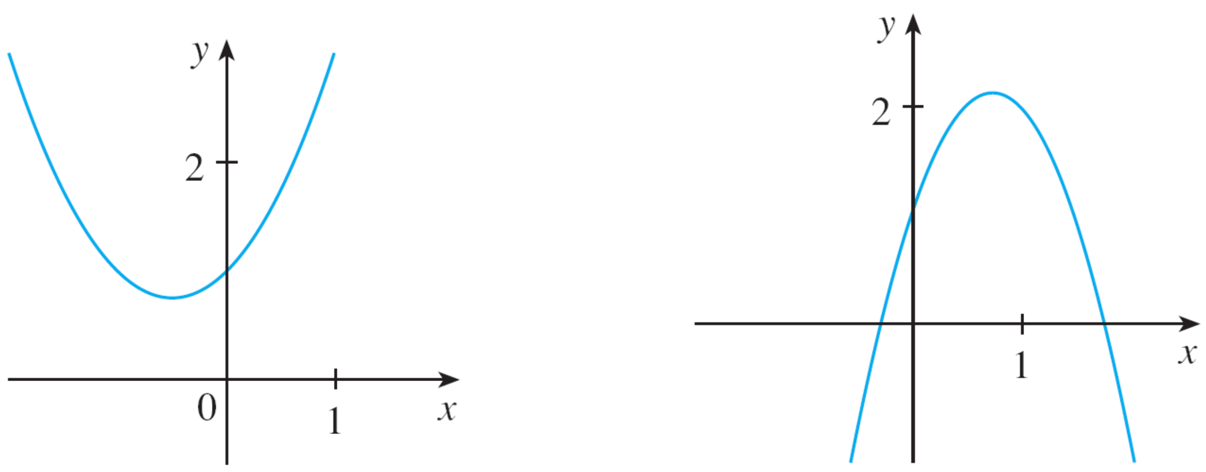
Um **polinômio de grau 2** é da forma $P(x) = ax^2 + bx + c$.

A função $P(\mathbf{x}) = \boldsymbol{ax^2 + bx + c}$ é chamada **função quadrática**.

Polinômios

O gráfico de $P(x) = ax^2 + bx + c$ é sempre uma parábola obtida por translações da parábola $y = ax^2$.

A parábola abre **para cima** se $a > 0$ e **para baixo** quando $a < 0$. (**Figura 7**.)



(a) $y = x^2 + x + 1$

(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

Os gráficos de funções quadráticas são parábolas

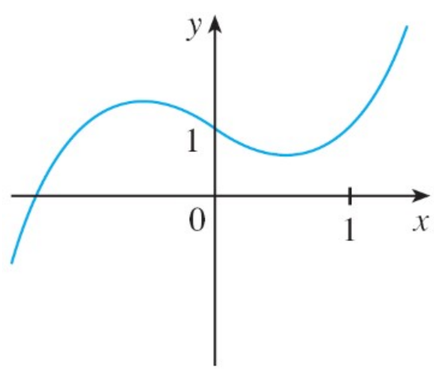
Figura 7

Polinômios

Um **polinômio de grau 3** tem a forma

$P\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ *sendo* $a \neq 0$

e é chamado **função cúbica**. A Figura 8(a) mostra o gráfico de uma função cúbica

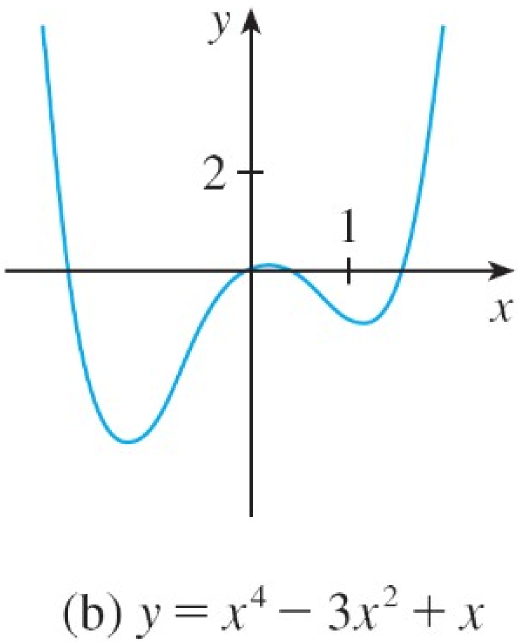


(a) $y = x^3 - x + 1$

Figura 8

Polinômios

A Figura 8 mostra os gráficos de polinômios de graus 4 e 5 nas partes (b) e (c).



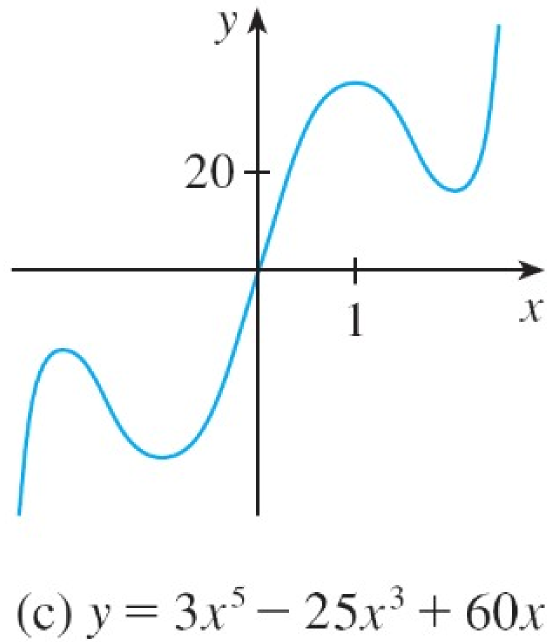


Figura 8

Exemplo 2

Uma bola é solta a partir do posto de observação no topo da Torre CN, 450 *m* acima do chão, e sua altura ***h*** acima do solo é registrada em intervalos de 1 segundo na **Tabela 2**.

Encontre um modelo para ajustar os dados e use-o para prever o tempo após o qual a bola atinge o chão.

TABELA 2

Tempo (segundos)	Altura (metros)
0	450
1	445
2	431
3	408
4	375
5	332
6	279
7	216
8	143
9	61

Exemplo 2 – *Solução*

Vamos fazer um diagrama de dispersão na **Figura 9** e observar que um modelo linear não é apropriado.

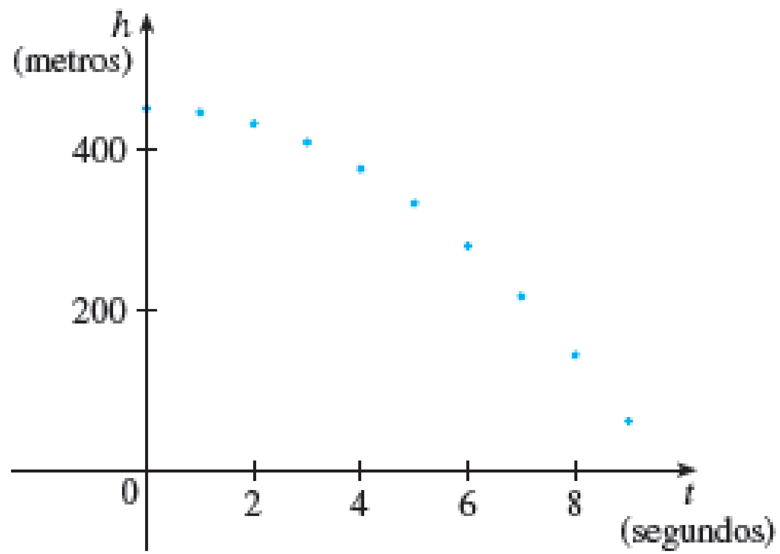


Diagrama de dispersão para uma bola caindo

Figura 9

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Parece que os pontos podem estar sobre uma parábola; assim, vamos tentar um modelo quadrático.

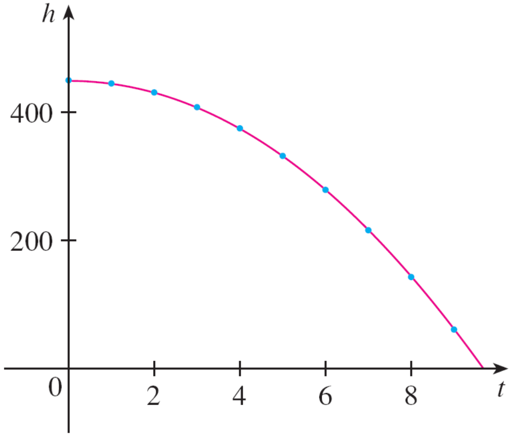
Usando uma calculadora gráfica ou um SAC (que usa o método dos mínimos quadrados), obtemos o seguinte modelo quadrático:

$$h = 449{,}36 + 0{,}96t - 4{,}90t^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Exemplo 2 – *Solução*

continuação

Na **Figura 10** fizemos um gráfico da **Equação 1** a partir dos pontos dados e vimos que o modelo quadrático é adequado.



Modelo quadrático para uma bola caindo

Figura 10

Exemplo 4 – *Solução*

continuação

A bola atinge o chão quando h = 0, e assim resolvemos a equação quadrática

$$-4{,}90t^2 + 0{,}96t + 449{,}36 = 0$$

A fórmula quadrática fornece

$$t = \frac{-0{,}96 \pm \sqrt{(0{,}96)^2 - 4(-4{,}90)(449{,}36)}}{2(-4{,}90)}$$

A raiz positiva é $t \approx 9{,}67$; dessa forma, predizemos que a bola vai atingir o chão após 9,7 segundos.

Funções Potências

Funções Potências

Uma função da forma $\boldsymbol{f(x) = x^a}$, onde $\boldsymbol{a}$ é uma constante, é chamada **função potência**.

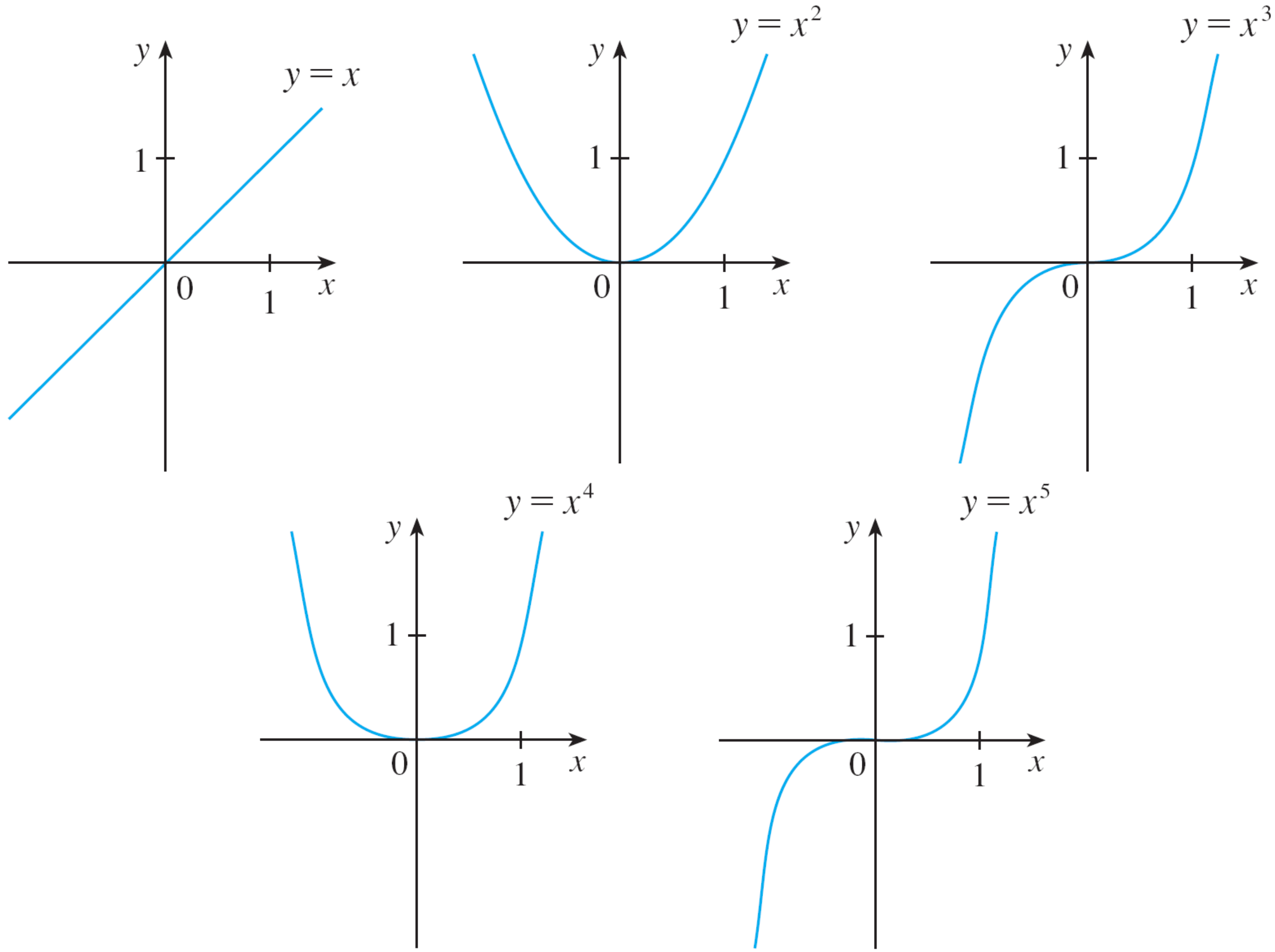
Vamos considerar vários casos.

(i) $\boldsymbol{a = n}$**, em que** $\boldsymbol{n}$ **é um inteiro positivo**

Os gráficos de $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x^n}$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5, e são indicados na **Figura 11**.

Expressões do tipo $\boldsymbol{x^n}$ são polinômios com somente um termo.

Funções Potências



Gráficos de $f(x) = x^n$ para $n = 1, 2, 3, 4, 5$

Figura 11

Funções Potências

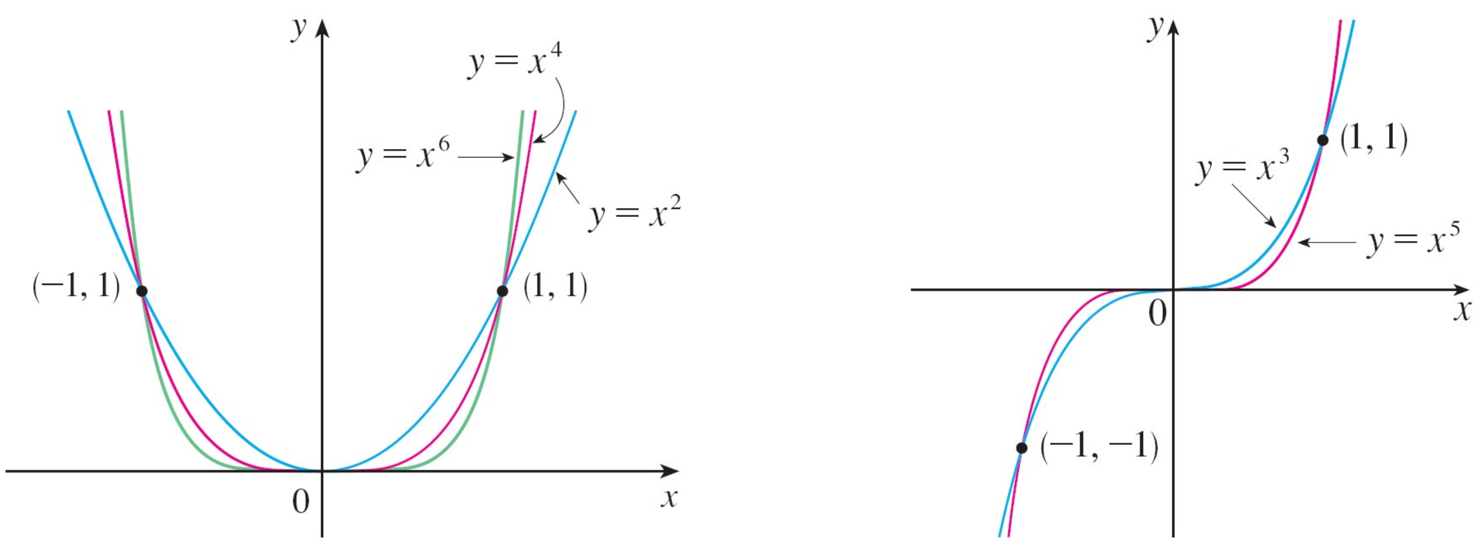
A forma geral do gráfico de $f(x) = x^n$ depende de ***n*** ser **par** ou **ímpar**.

Se ***n*** for **par**, então $f\,(x) = x^n$ será uma função par e seu gráfico será similar ao da parábola $y = x^2$.

Se ***n*** for **ímpar**, então $f(x) = x^n$ será uma função ímpar e seu gráfico será similar ao de $y = x^3$.

Funções Potências

Observe na **Figura 12**, porém, que à medida que ***n*** cresce, o gráfico de $\boldsymbol{y = x^n}$ torna-se mais achatado quando próximo de zero e mais inclinado quando $|\ x\ | \geq 1$. (Se x for pequeno, então x^2 é menor; x^3 será ainda menor, x^4 será muito menor, e assim por diante.)



Famílias de funções potências

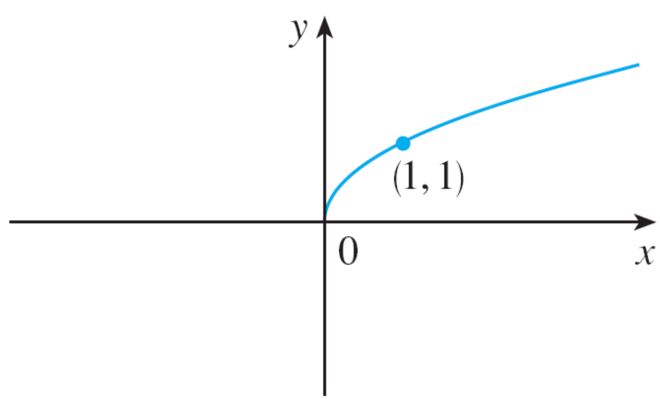
Figura 12

Funções Potências

(ii) a = 1/n, onde n é um inteiro positivo

A função $f(x) = x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ é uma **função raiz**.

Para n = 2, ela é a função raiz quadrada, $f(x) = \sqrt{x}$, cujo domínio é $[0, \infty)$ e cujo gráfico é a parte superior da parábola $x = y^2$. [Figura 13(a).]



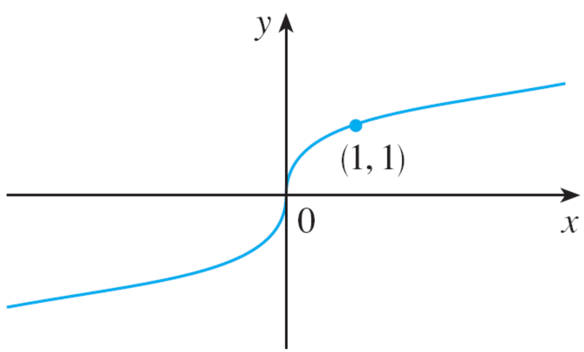
$f(x) = \sqrt{x}$

Figura 13(a)

Funções Potências

Para outros valores pares de *n*, o gráfico de $y = \sqrt[n]{x}$ é similar ao de $y = \sqrt{x}$.

Para *n* = 3, temos a função raiz cúbica $y = \sqrt[3]{x}$. cujo domínio é $\mathbb{R}$. (lembre-se de que todo número real tem uma raiz cúbica).
O gráfico de $y = \sqrt[3]{x}$. está na Figura 13(b).



$f(x) = \sqrt[3]{x}$

Gráfico da função raiz

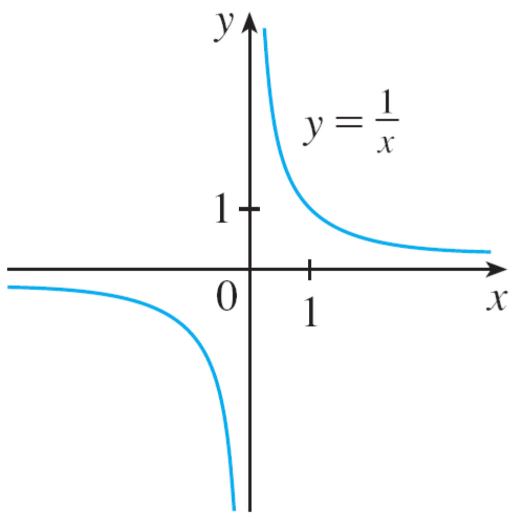
Figura 13(b)

Funções Potências

(iii) $\boldsymbol{a = -1}$

O gráfico de **função recíproca** $f(x) = x^{-1}$ ou $f(x) = 1/x$ está na **Figura 14**.

Seu gráfico tem a equação $\boldsymbol{y = 1/x}$, ou $\boldsymbol{xy = 1}$, e é uma **hipérbole** com os eixos coordenados como suas **assíntotas**.



A função recíproca
Figura 14

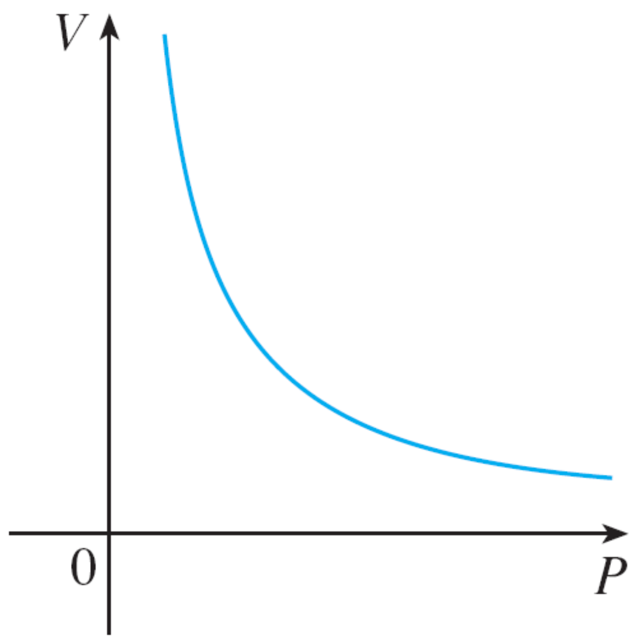
Funções Potências

Esta função aparece em física e química em conexão com a Lei de Boyle, que afirma que, sendo constante a temperatura, o volume de um gás *V* é inversamente proporcional à pressão *P*:

$$V = \frac{C}{P}$$

onde *C* é uma constante.

Assim, o gráfico de *V* como uma função de *P* (**Figura 15**) tem o mesmo formato geral da metade direita da **Figura 14**.



Volume como uma função da pressão à temperatura constante

Figura 15

Funções Racionais

Funções Racionais

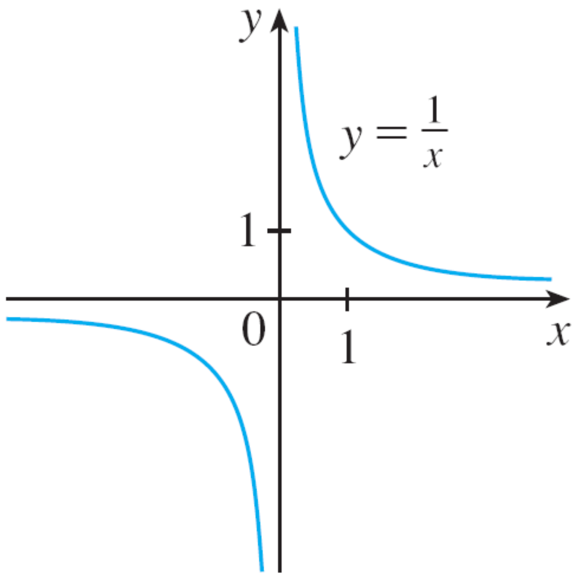
Uma **função racional** *f* é a razão de dois polinômios:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

onde *P* e *Q* são polinômios.

O **domínio** consiste em todos os valores de *x* tais que $Q(x) \neq 0$.

Um exemplo simples de uma função racional é a função $\boldsymbol{f(x) = 1/x}$, cujo domínio é $\{x \mid x \neq 0\}$; esta é a função recíproca cujo gráfico está na **Figura 14**.



A função recíproca

Figura 14

Funções Racionais

A função

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^2 - 4}$$

é uma função racional com domínio $\{x \mid x \neq \pm 2\}$.

O gráfico é mostrado na **Figura 16**.

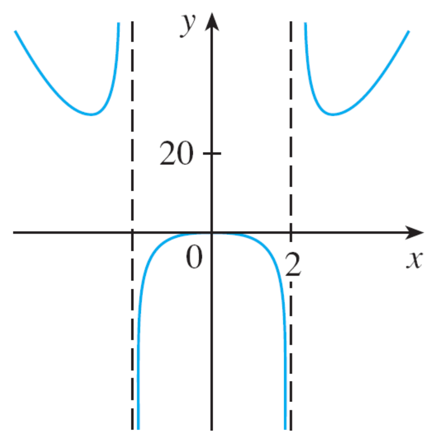


Figura 16

Funções Algébricas

Funções Algébricas

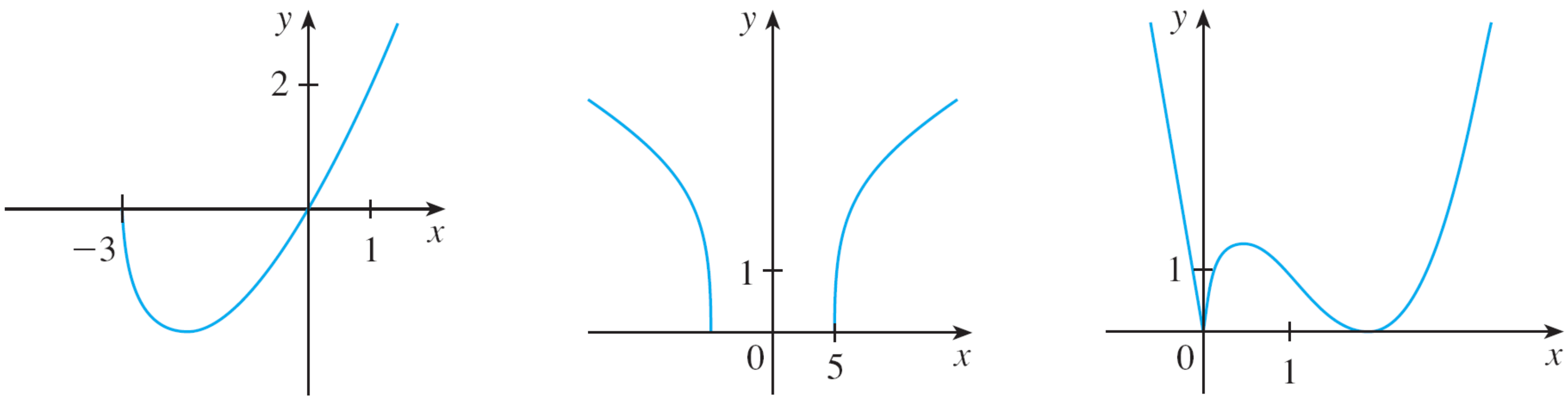
Uma função ***f*** é chamada **função algébrica** se puder ser construída por meio de operações algébricas (como adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes) a partir de polinômios.

Toda função racional é automaticamente uma função algébrica. A seguir, alguns exemplos:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \qquad g(x) = \frac{x^4 - 16x^2}{x + \sqrt{x}} + (x - 2)\sqrt[3]{x + 1}$$

Funções Algébricas

Quando trabalharmos com funções algébricas, veremos que seus gráficos podem assumir diversas formas. A **Figura 17** ilustra algumas dessas possibilidades.



(a) $f(x) = x\sqrt{x+3}$ (b) $g(x) = \sqrt[4]{x^2 - 25}$ (c) $h(x) = x^{2/3}(x-2)^2$

Figura 17

Funções Algébricas

Um exemplo de função algébrica ocorre na **Teoria da Relatividade**.

A **massa** de uma partícula com uma **velocidade** ***v*** é

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

onde $\boldsymbol{m_0}$ é a massa da partícula em repouso e
c = 3,0 x 10^5 km/s é a **velocidade da luz** no vácuo.

Funções Trigonométricas

Funções Trigonométricas

Em cálculo, convenciona-se dar a medida de ângulos em radianos (exceto quando explicitamente mencionado).

Por exemplo, quando utilizamos a função $f(x) = \text{sen } x$, entende-se que **sen** x seja o **seno** de um ângulo cuja medida de radianos é x.

Funções Trigonométricas

Os gráficos das funções **seno** e **cosseno** estão na **Figura 18**.

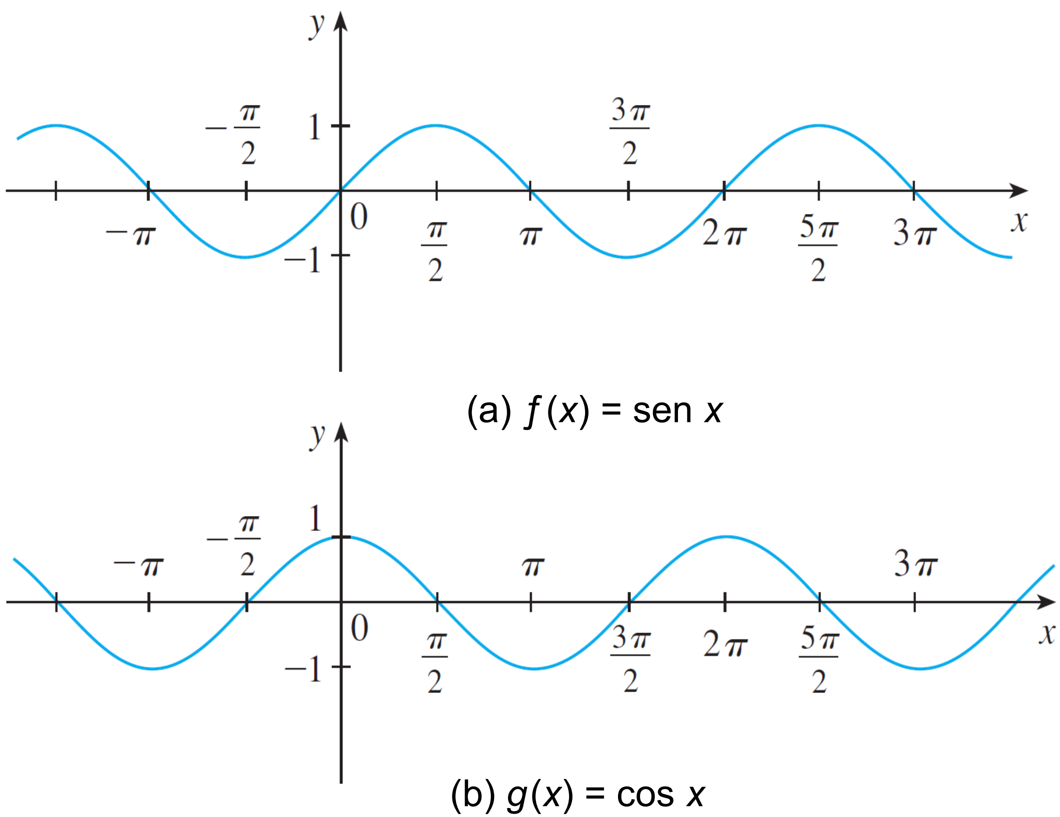


Figura 18

Funções Trigonométricas

Observe que, tanto para a **função seno** quanto para a **função cosseno**, o domínio é $(-\infty, \infty)$, e a imagem é o intervalo fechado [–1, 1].

Dessa forma, para todos os valores de *x*, temos

$$\boxed{-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1}$$

ou, em termos de valores absolutos,

$$|\operatorname{sen} x| \leq 1 \qquad |\cos x| \leq 1$$

Funções Trigonométricas

Além disso, os **zeros** da **função seno** ocorrem nos múltiplos inteiros de π ; isto é,

sen *x* = 0 quando ***x* = *n*π,** *sendo* ***n*** um número inteiro

Uma **propriedade** importante das funções seno e cosseno é que elas são **periódicas** e têm um período 2π.

Isso significa que, para todos os valores de *x*,

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x \qquad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

Funções Trigonométricas

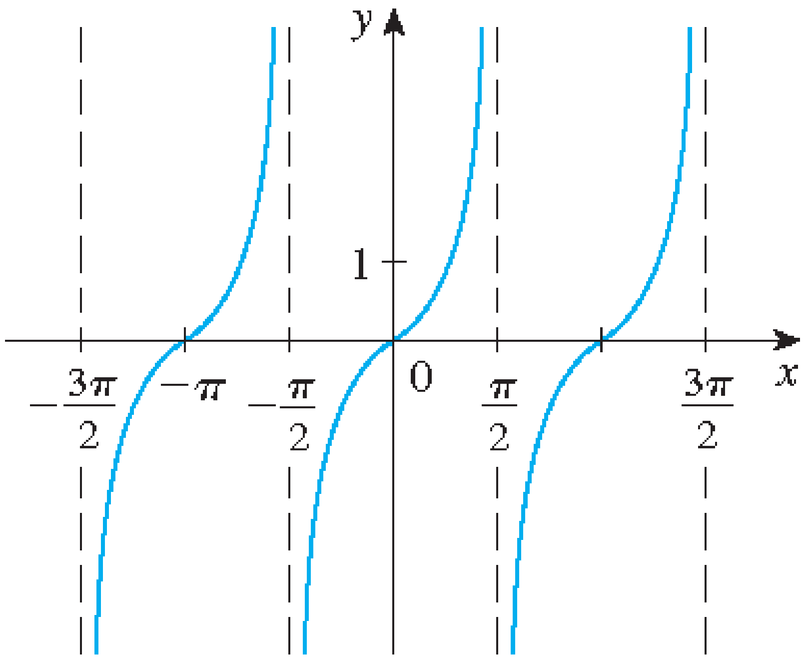
A **função tangente** relaciona-se com as funções seno e cosseno pela equação

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

e seu gráfico é ilustrado na **Figura 19**.

Ela **não está definida** quando **cos *x* = 0**, isto é, quando $x = \pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \ldots$

Sua **imagem** é $(-\infty, \infty)$.



$y = \tan x$

Figura 19

Funções Trigonométricas

Observe que a função tangente tem período π :

tg (x + π) = tg x para todo ***x***

As três funções trigonométricas remanescentes (cossecante, secante e cotangente) são as recíprocas das funções do seno, cosseno e tangentes.

Isto é:

$$cossec(x) = \frac{1}{sen(x)} \qquad sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \qquad cotg(x) = \frac{1}{tg(x)}$$

Funções Exponenciais

Funções Exponenciais

As **funções exponenciais** são da forma $\boldsymbol{f(x) = a^x}$, em que a **base *a*** é uma constante positiva.

Os gráficos de $\boldsymbol{y = 2^x}$ e $\boldsymbol{y = (0{,}5)^x}$ são indicados na **Figura 20**.

Em ambos os casos, o domínio é $(-\infty, \infty)$ e a imagem é $(0, \infty)$.

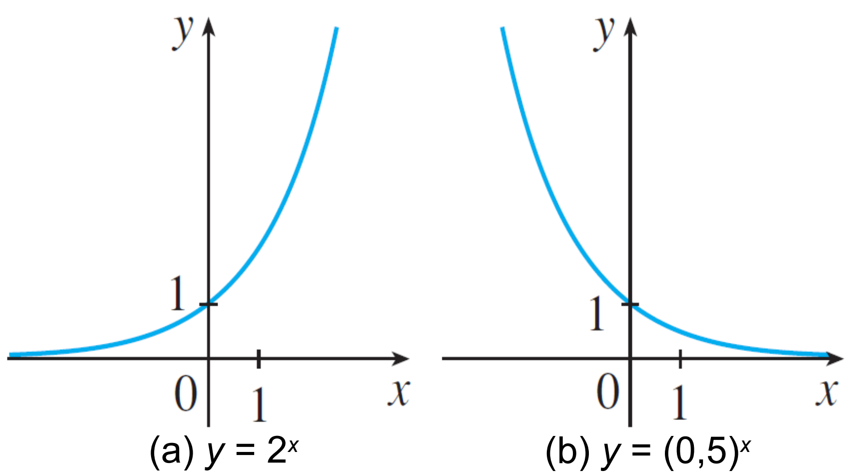


Figura 20

Funções Exponenciais

As funções exponenciais são úteis na modelagem de muitos fenômenos naturais como **crescimento populacional** (se $a > 1$) e **decaimento radioativo** (se $a < 1$).

Funções Logarítmicas

Funções Logarítmicas

As **funções logarítmicas** ***f*** **(*x*) = log*a*x**, onde a **base *a*** é uma constante positiva, são **inversas** das funções exponenciais.

A **Figura 21** mostra os gráficos de quatro funções logarítmicas com várias bases.

Em cada caso:
o domínio é $(0, \infty)$,

a imagem é $(-\infty, \infty)$

e as funções crescem vagarosamente quando ***x* > 1**.

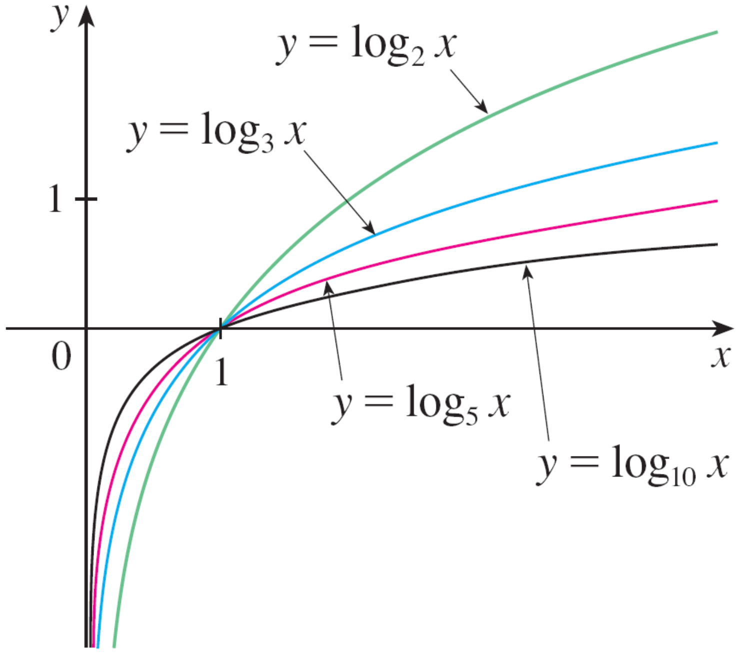


Figura 21

Exemplo 3

Classifique as funções a seguir em um dos tipos discutidos.

(a) $f(x) = 5^x$

(b) $g(x) = x^5$

(c) $h(x) = \dfrac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$

Exemplo 5 – *Solução*

(a) $f(x) = 5^x$ é uma **função exponencial,** pois ***x*** é o exponente.

(b) $g(x) = x^5$ é a **função potência,** pois ***x*** é a base.

Podemos também considerá-la um **polinômio de grau 5**.

(c) $$h(x) = \frac{1 + x}{1 - \sqrt{x}}$$ é uma **função algébrica**.

(d) $u(t) = 1 - t + 5t^4$ é um **polinômio de grau 4**.