Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta – Parte 11

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br - www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti

Relações e Funções

- **Revisão Conceitos Básicos**
  - **Produto Cartesiano -** Dados os conjuntos *A* e *B*, o produto cartesiano de *A* por *B*, denotado *A X B*, é o conjunto formado por todos os pares ordenados (*a, b*) onde **a** $\in$ **A** e **b** $\in$ **B**, isto é:
    - A X B = {(a,b) | $\forall$ a $\in$ A, $\forall$ b $\in$ B}
    - Ex.: Dados A={a} e B={a,b}
      - A X B = {(a,a), (a,b)} / B X A = {(a,a), (b,a)}
  - **Relação** - Dados os conjuntos *A* e *B*, uma relação R de A em B, denotada R: A$\rightarrow$B, é qualquer subconjunto do produto cartesiano A X B.
    - Ex.: Dados A={1,3,5} e B={3,9,15,20}, a relação R: A$\rightarrow$B, tal que:
      - R = {(a,b) | b=3a} é dada pelos pares ordenados R = {(1,3), (3,9), (5,15)}.

Relações e Funções

- **Relações Binárias**
  - O Produto Cartesiano de um conjunto S com ele mesmo, S X S ou S^2 é o conjunto de todos os pares ordenados de elementos de S.
  - Ex. 01. Seja S={1,2}, então, S X S = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)}
  - Se estivermos interessados na relação de igualdade (x=y), então (1,1) e (2,2) seriam os elementos de S que satisfazem a relação.
  - Se estivermos interessados na relação de um número ser menor que outro (x<y), teríamos o par (1,2) como único que atende à relação.
  - Ou seja, definir uma **relação binária R em um conjunto S** é especificar um subconjunto de S X S.

Relações e Funções

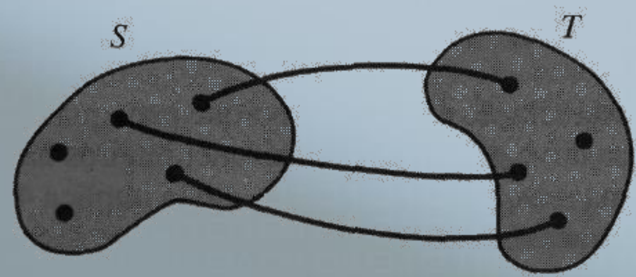
- **Relações Binárias**
  - Em geral, uma relação binária é definida por uma descrição da relação, ao invés da lista dos pares ordenados.
  - A descrição fornece uma caracterização dos elementos pertencentes à relação.
  - Ex.02: Seja $S=\{1,2\}$, como no Ex. 01. Seja R a relação em S dada por $R=\{(x,y) \in S \times S \mid x + y = \text{ímpar}\}$.
    - Então $R = \{(1,2), (2,1)\}$.

Relações e Funções

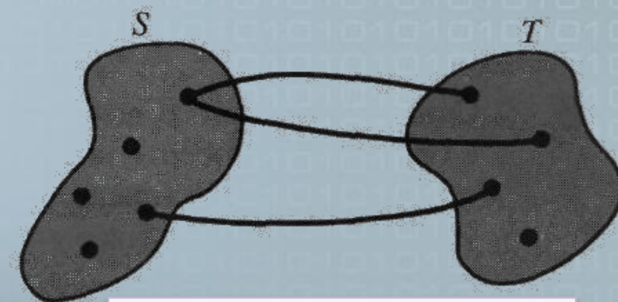
- **Tipos de Relações Binárias**
  - Seja uma relação em S com os pares ordenados na forma (s1, s2).
  - Uma relação é do tipo **um para um** se cada primeira componente (s1) e cada segunda componente (s2) do par ordenado aparece uma única vez na relação.
  - Uma relação é do tipo **um para muitos** se alguma primeira componente (s1) aparece em mais de um par.
  - A relação é dita **muitos para um** se alguma segunda componente s2 aparecer em mais de um par.
  - Finalmente, a ela é **muitos para muitos** se pelo menos um s1 aparece em mais de um par e pelo menos um s2 também aparece em mais de um par.

Relações e Funções

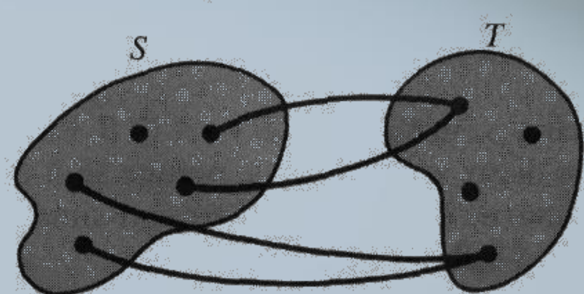
- **Tipos de Relações Binárias**



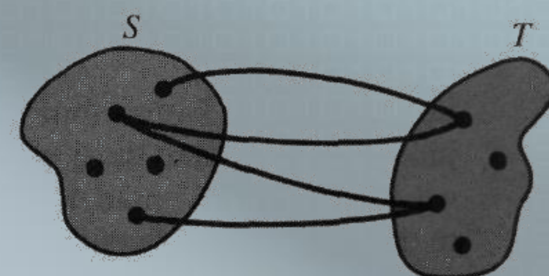
Um para um



Um para muitos



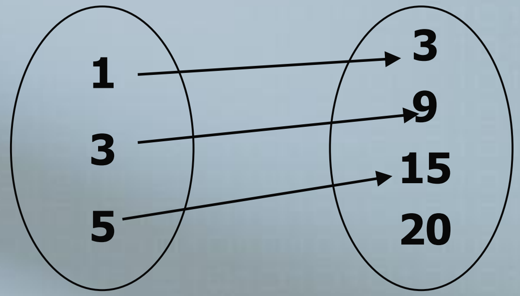
Muitos para um



Muitos para muitos

Relações e Funções

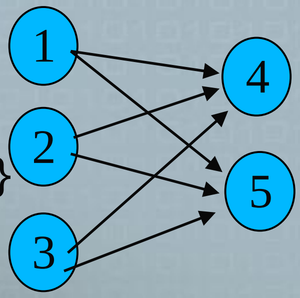
- **Representação** – A relação pode ser representada através de *Diagrama de Venn*.



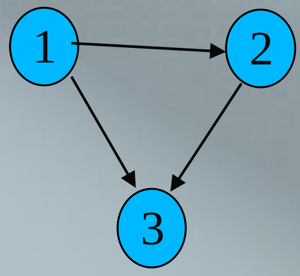
- **Domínio e Imagem de uma Relação** - O **Domínio** de uma relação *R*, denotado *D*(*R*), é o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par ordenado da relação. No exemplo anterior, o domínio é o conjunto *D*(*R*) = {1,3,5}
- A **Imagem** de uma relação *R*, denotada *I*(*R*), é o conjunto formado pelos segundos elementos de cada par ordenado da relação. exemplo anterior, o domínio é o conjunto *I*(*R*) = {3,9,15}

Relações e Funções

- **Relação como Grafos**
  - Toda relação R: A→B pode ser representada a partir de um grafo direcionado com arestas ligando cada par ordenado (a,b), com origem em **a** e destino em **b**.
  - Ex.: Dados A={1,2,3} e B={4,5}



  - A X B: **A→B** {(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)}
  - <:**A→A** = {(1,2), (1,3), (2,3)}



Relações e Funções

- **Relação como Matrizes**
  - A relação R: A$\rightarrow$B pode ser representada na forma de matriz, o que facilita sua implementação em sistemas computacionais.
  - Seja A={a_1, a_2, ...a_n} e B={b_1, b_2, ...b_m} dois conjuntos finitos. A representação da relação R como matriz é como se segue:
    - O número de linhas é n (número de elementos do domínio).
    - O número de colunas é m (n° de elementos do Contra-Domínio)
    - A matriz tem n * m posições e cada posição contém um valor lógico – verdadeiro ou falso.
    - Se (ai, bj) $\in$ R, então a posição contém o valor verdadeiro (1); caso contrário, contém o valor falso (0).
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. As seguintes relações são representadas como matrizes:

1 - A X B: **A$\rightarrow$B**

A X B	**a**	**b**
a	1	1

2 – S={(0,a), (1,b)}: C$\rightarrow$B

S	**a**	**b**
0	1	0
1	0	1
2	0	0

3 - =: A$\rightarrow$B

=	**a**	**b**
a	1	0

Relações e Funções

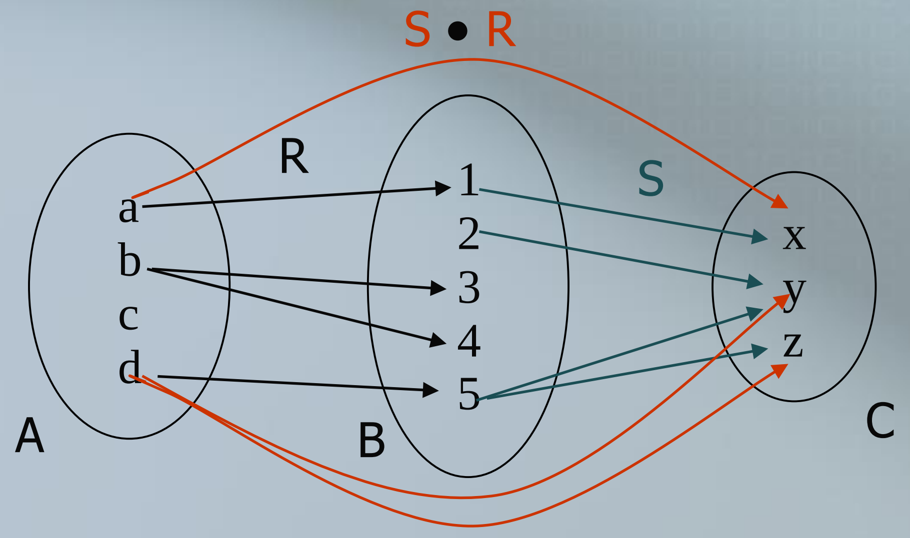
- **Relação Dual**
  - Seja relação R: $A \rightarrow B$. A *Relação Dual, Oposta ou Inversa* é denotada por: R^{-1}: $B \rightarrow A$ e é obtida pela inversão dos componentes de cada par ordenado.
    - $R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$
    - A X B: **A→B** , $(A \times B)^{-1} = B \times A$: $B \rightarrow A$
  - A **matriz** da relação dual é a matriz transposta da matriz da relação.
  - O **grafo** da relação dual é o grafo resultante da inversão dos sentidos das arestas.
- **Composição de Relações**
  - Sejam as relações R: $A \rightarrow B$ e S:$B \rightarrow C$. A composição de R e S, resultando na relação:

$$S \bullet R: A \rightarrow C, \text{ tal que:}$$

$$S \bullet R = \{(a,c) \mid (\exists b \in B)(aRb \wedge bSc)\}$$

Relações e Funções

- **Composição de Relações**
  - Ex: A composição das relações R: A→B e S:B →C é S•R: A → C, sendo que:
    - R = {(a,1), (b,3), (b,4), (d,5)}
    - S = {(1,x), (2,y), (5,y), (5,z)}
    - S • R = {(a,x), (d,y), (d,z)}
    - A composição das relações é mostrada no diagrama abaixo:



Relações e Funções

- **Tipos de Relações –** Uma relação pode ser classificada nos seguintes tipos, os quais não são mutuamente exclusivos:
  - **Funcional**
  - **Injetora**
  - **Total**
  - **Sobrejetora**
  - **Monomorfismo**
  - **Epimorfismo**
  - **Isomorfismo**
- Os tipos acima possuem noção de dualidade que pode simplificar o estudo e a respectiva compreensão de cada tipo.
  - Funcional é o dual de injetora e vice-versa
  - Total é o dual de sobrejetora e vice-versa.
  - Monomorfismo é o dual de epimorfismo e vice-versa.
  - Isomorfismo é dual de si mesmo.

Relações e Funções

- **Relação Funcional –** define o conceito de função.
  - Seja a relação R: $A \to B$. R é funcional se e somente se:
    $(\forall a \in A)(\forall b1 \in B)(\forall b2 \in B)(aRb1 \land aRb2 \to b1=b2)$
  - Ou seja, em uma relação funcional, cada elemento de **A** está relacionado com, no máximo, um elemento de **B.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São relações funcionais:	Não são relações funcionais:
$\emptyset$: $A \to B$	A X B: $A \to B$
{(0,a), (1,b)}: $C \to B$	<: $C \to C$
=: $A \to B$	

  - Matriz: existe, *no máximo*, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.
  - Grafo: existe, *no máximo*, um arco **partindo** de cada nó.

Relações e Funções

- **Relação Injetora –** o inverso (dual) de uma funcional.
  - Seja a relação $R: A \to B$. R é injetora se e somente se: $(\forall b \in B)(\forall a1 \in A)(\forall a2 \in A)(a1Rb \wedge a2Rb \to a1=a2)$
  - Ou seja, em uma relação **injetora**, cada elemento de **B** está relacionado com, no máximo, um elemento de **A.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São relações injetoras:	Não são relações injetoras:
$\emptyset: A \to B$ $\{(0,a), (1,b)\}: C \to B$ $=: A \to B$ $A \times B: A \to B$	$B \times A: B \to A$ $<: C \to C$

  - Matriz: existe, *no máximo*, um valor verdadeiro em cada **coluna** da matriz.
  - Grafo: existe, *no máximo*, um arco **chegando** em cada nó.

Relações e Funções

- **Relação Total**
  - Seja a relação R: $A \rightarrow B$. R é total se e somente se:
    $$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$$
  - Ou seja, em uma relação **total**, para cada elemento de **A,** existe pelo menos, um elemento de **B.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São relações totais:	Não são relações totais:
$=: A \rightarrow B$	$\varnothing: A \rightarrow B$
$A \times B: A \rightarrow B$	$\{(0,a), (1,b)\}: C \rightarrow B$
	$<: C \rightarrow C$

  - Matriz: existe, *pelo menos*, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.
  - Grafo: existe, *pelo menos*, um arco **partindo** de cada nó.

Relações e Funções

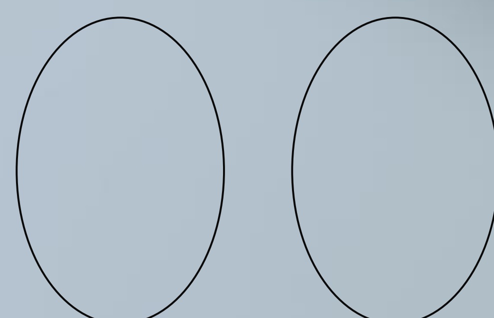
- **Relação Sobrejetora**
  - Seja a relação R: $A \rightarrow B$. R é sobrejetora se e somente se:
    $$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(aRb)$$
    - Ou seja, em uma relação **sobrejetora**, para cada elemento de **B,** existe pelo menos, um elemento de **A.**
    - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São relações sobrejetoras:	Não são relações sobrejetoras:
$=: A \rightarrow A$	$=: A \rightarrow B$
$\{(0,a), (1,b)\}: C \rightarrow B$	$\emptyset: A \rightarrow B$
$A \times B: A \rightarrow B$	$<: C \rightarrow C$

    - Matriz: existe, *pelo menos*, um valor verdadeiro em cada **coluna** da matriz.
    - Grafo: existe, *pelo menos*, um arco **chegando** em cada nó.

Relações e Funções

- **Relação Funcional –** cada elemento de **A** está relacionado com, no máximo, um elemento de **B.**
- **Relação Injetora –** cada elemento de **B** está relacionado com, no máximo, um elemento de **A.**
- **Relação Total** para cada elemento de **A,** existe pelo menos, um elemento de **B.**
- **Relação Sobrejetora -** para cada elemento de **B,** existe pelo menos, um elemento de **A**



Relações e Funções

- **Monomorfismo ou monorrelação**
  - Seja a relação R: A$\rightarrow$B. R é um monomorfismo se e somente se for simultaneamente **TOTAL** e **INJETORA**.
  - Ou seja, em um monomorfismo, cada elemento de **B,** está relacionado com, no máximo, um elemento de **A e** para cada elemento de **A,** existe pelo menos, um elemento de **B.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São monomorfismos:	Não são monomorfismos:
=: A$\rightarrow$B A X B: A$\rightarrow$B	B X C: B$\rightarrow$C $\emptyset$: A$\rightarrow$B {(0,a), (1,b)}: C$\rightarrow$B <: C$\rightarrow$C

  - Matriz: existe, *pelo menos*, um valor verdadeiro em cada **linha (total)** e *no máximo* um valor verdadeiro em cada **coluna(injetora)** da matriz.
  - Grafo: existe, *pelo menos*, um arco **partindo (total)** e *no máximo*, um arco **chegando (injetora)** em cada nó.

Relações e Funções

- **Epimorfismo ou Epirrelação**
  - Seja a relação R: A$\rightarrow$B. R é um Epimorfismo se e somente se for simultaneamente **FUNCIONAL** e **SOBREJETORA**.
  - Ou seja, em um Epimorfismo, cada elemento de **A,** está relacionado com, no máximo, um elemento de **B e** para cada elemento de **B,** existe pelo menos, um elemento de **A.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São epimorfismos:	Não são epimorfismos:
=: A$\rightarrow$A	=: A$\rightarrow$B
{(0,a), (1,b)}: C$\rightarrow$B	$\varnothing$: A$\rightarrow$B
	A X B: A$\rightarrow$B
	<: C$\rightarrow$C

  - Matriz: existe, *pelo menos*, um valor verdadeiro em cada **coluna (sobrejetora)** e *no máximo* um valor verdadeiro em cada **linha(funcional)** da matriz.
  - Grafo: existe, *pelo menos*, um arco **chegando (sobrejetora)** e *no máximo*, um arco **partindo (funcional)** em cada nó

Relações e Funções

- **Isomorfismo ou Isorrelação**
  - Seja a relação R: A→B. R é um Isomorfismo se e somente se for simultaneamente **TOTAL, FUNCIONAL, INJETORA E SOBREJETORA.**
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São isomorfismos:	Não são isomorfismos:
{(0,1), (1,2), (2,0)}: C→C =: B → B	∅: A→B A X B: A→B <: C→C

  - Definição para grafos e matrizes ?

Relações e Funções

- **Exercício**

1. Dados os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{3,4,5,6,10\}$, determine as relações R_1 = A X B: **A→B** e R_2= <: A X B **A→B,** determinando o(s) tipo(s) de relação de R_1 e R_2 e faça a representação de cada uma por matriz e por grafo.

Relações e Funções

- ## Funções Parciais
  - Uma *função parcial* é uma relação funcional. Se a relação funcional for *total*, então é denominada de função total ou simplesmente *função.*

  - É uma função **que não é definida para todos** os elementos do domínio. Normalmente, as abordagens matemáticas são focadas no conceito de função total, mas o estudo de funções parciais é tão importante quanto o de total.

Relações e Funções

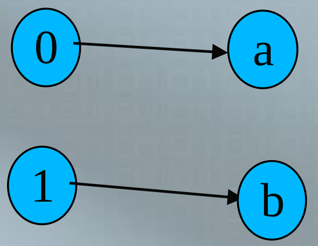
- **Função Parcial**
  - Todos os conceitos vistos para uma relação funcional são válidos para funções parciais, como por exemplo:
    - As terminologias de domínio, imagem etc..
    - Os tipos injetora, sobrejetora etc..
  - **Definição:** uma Função Parcial é uma relação funcional $f \subseteq A \times B$
    - Cada elemento do domínio está relacionado com **no máximo,** um elemento do contradomínio.
    - Uma função parcial é denotada por f: $\mathbf{A \rightarrow B}$ e o par $(a,b) \in f$ é denotado por $f(a)=b$.
  - Ex.: Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São funções parciais:	Não são funções parciais:
$\emptyset: A \rightarrow B$	$A \times B: A \rightarrow B$
$\{(0,a), (1,b)\}: C \rightarrow B$	$<: C \rightarrow C$
$=: A \rightarrow B$	$T \subseteq A \times B$, $T=\{(a,a), (a,b)\}$

Relações e Funções

- **Função Parcial**
  - Matriz: existe, *no máximo*, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.
  - Grafo: existe, *no máximo*, um arco **partindo** de cada nó.
    - Ex.: Sejam A ={0,1,2}, B ={a,b} e **f={(0,a), (1,b)}: A→B**

f	a	b
0	1	0
1	0	1
2	0	0



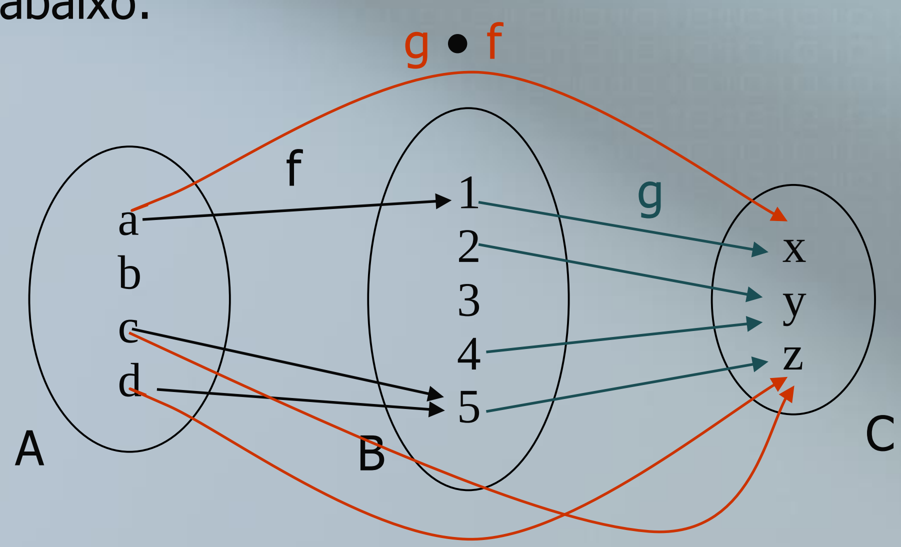
  - A operação div: $\Re \to \Re$ tal que div(x, y) = x/y é uma função parcial pois não é definida para (x, 0), qualquer que seja $x \in \Re$.

Relações e Funções

- **Função Parcial Dual (oposta, inversa)**
  - A relação dual de uma função parcial não necessariamente é uma função parcial.
  - Seja A={0,1,2} e a função parcial f:A x A tal que f={(0,2),(1,2) }. Assim, a relação dual (inversa) de f é f^{-1} ={(2,0),(2,1)}, que claramente não é uma relação funcional e então, não é uma função parcial.
  - Lembrar que o dual de uma relação funcional é injetora.
- **Composição de Funções Parciais**
  - Por definição, a composição de relações funcionais é uma relação funcional. Daí, a composição resultante de funções parciais também é uma função parcial.

Relações e Funções

- **Composição de Funções Parciais**
  - Ex.: A composição das funções parciais f: A→B e g: B → C é g • f: A → C, sendo que:
    - f = {(a,1), (c,5), (d,5)}
    - g = {(1,x), (2,y), (4,y), (5,z)}
    - g • f = {(a,x), (c,z), (d,z)}
    - A composição das funções é mostrada no diagrama abaixo:



Relações e Funções

- **Função Total**
  - Uma *função total* ou simplesmente *função* é uma função parcial f: $A \rightarrow B$ a qual é total.
  - É uma função que é definida para todos os elementos do domínio (A), ou seja devem ser válidas as seguintes proposições:

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb) \text{ e}$$

$$(\forall a \in A)(\forall b1 \in B)(\forall b2 \in B)(aRb1 \wedge aRb2 \rightarrow b1=b2)$$

- Sejam A={a}, B={a,b} e C={0,1,2}. Então:

São funções:	Não são funções:
h $\subseteq$ C X B, h={(0,a), (1,b), (2,b)}	**R** $\subseteq$ A X B, R= $\varnothing$
{(0,a), (1,b), (2,b)}: $C \rightarrow B$	$\varnothing$: $A \rightarrow B$
p $\subseteq$ A X B, x**p**y $\Leftrightarrow$ x=y, p = {(a,a)}	**S** $\subseteq$ C X B, S={(0,a), (1,b)}
=: $A \rightarrow B$	{(0,a), (1,b)}: $C \rightarrow B$
	<: $C \rightarrow C$

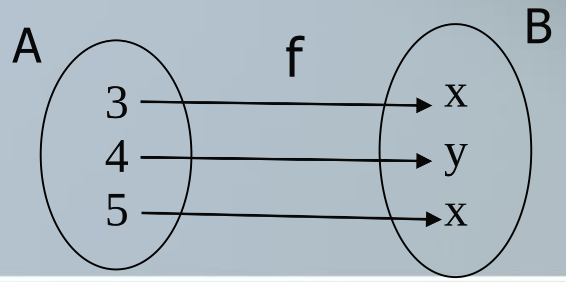
Relações e Funções

- **Função**
  - Em termos de notação como matriz ou grafo, basta considerar que uma função é uma relação funcional e total. Assim:
    - Matriz: existe, *exatamente*, um valor verdadeiro em cada **linha** da matriz.
    - Grafo: existe, *exatamente*, um arco **partindo** de cada nó.
  - **Função Injetora** - Seja a função $f: A \rightarrow B$. f é injetora se e somente se:

    $(\forall b \in B)(\forall a1 \in A)(\forall a2 \in A)(f(a1) = b \land f(a2) = b \rightarrow a1 = a2)$
  - Ou seja, em uma função **injetora**, cada elemento de **B** está relacionado com, no máximo, um elemento de **A.**
    - Ex1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^3$, é injetora.
    - Ex2. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2$, não é injetora.
    - Ex3. $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid f(x) = x^2$, é injetora.

Relações e Funções

- Em uma **Função injetora**, cada elemento do co-domínio é imagem de no máximo, um elemento do domínio.
- **Função Sobrejetora** - Seja a função f: $A \rightarrow B$. f é sobrejetora se, e somente se:
  - $(\forall b \in B)(\exists a \in A)(f(a)=b)$
- Ou seja, em uma função **sobrejetora**, para cada elemento de **B,** existe pelo menos, um elemento de **A.**
  - Em uma **Função sobrejetora**, todo elemento do co-domínio é imagem de pelo menos, um elemento do domínio.
- **Função bijetora (ou isomorfismo)** – Quando uma função é, simultaneamente, **injetora e sobrejetora**.
  - Em uma **Função bijetora**, todo elemento do co-domínio é imagem, exatamente, de um elemento do domínio.



Relações e Funções

- **Exercício**

1. Considerem-se as funções *adição* sobre o conjunto dos números naturais ($+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$), *divisão*, sobre o conjunto dos números reais ($/: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$), e *raiz quadrada*, sobre o conjunto dos números inteiros ($\sqrt{}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$). Verificar as propriedades (injetora, sobrejetora e total) de cada função [1].

$\mathbb{N}$= Números naturais {0,1,2..}
$\mathbb{Z}$=Números inteiros {...-2,-1,0,1,2...}
$\mathbb{R}$= Números reais.

	Injetora	**Sobrejetora**	**Total**
$+: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$			
$/: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$			
$\sqrt{}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$			

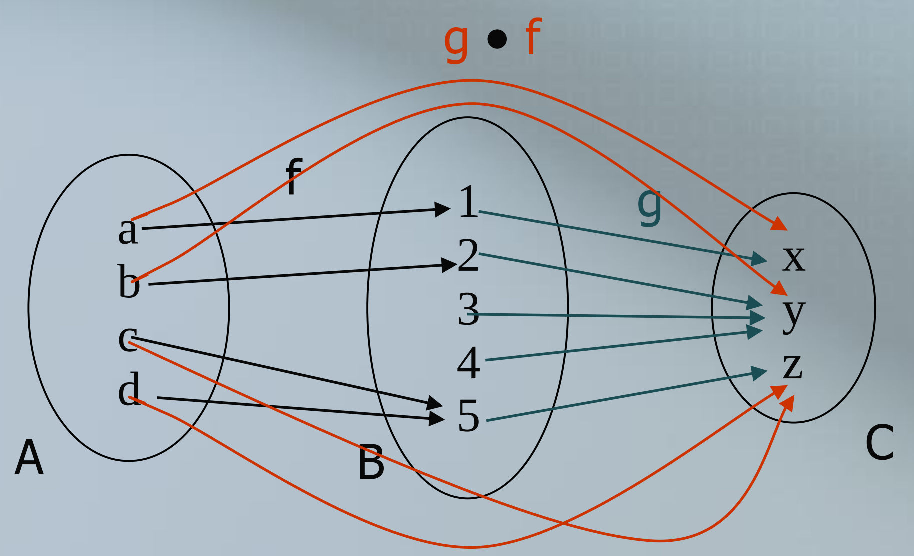
[1] Do Livro Linguagens Formais – Teorias, Modelagem e Implementação, Ramos, M. V. M., Neto, J.J. e Vega, I. S. – Bookman, 2009.

Relações e Funções

- **Função Dual (Oposta)**
  - Da mesma forma que em funções parciais, a relação dual de uma função (total) não necessariamente é uma função.
  - **Exemplos**
    - Seja A = {0,1,2} e a função R $\subseteq$ A x A tal que R={(0,2),(1,2),(2,1)}. Assim, a relação dual (inversa) de R é R^{-1} = {(2, 0), (2, 1), (1, 2) }, que não é uma relação funcional e então, não é uma função.
    - Seja f: {0, 1} $\rightarrow$ {0, 1, 2} tal que f = { (0, 0), (1, 1) }. Assim, sua dual possui o mesmo conjunto de pares ordenados, { (0, 0), (1, 1) }, mas não é uma função total.

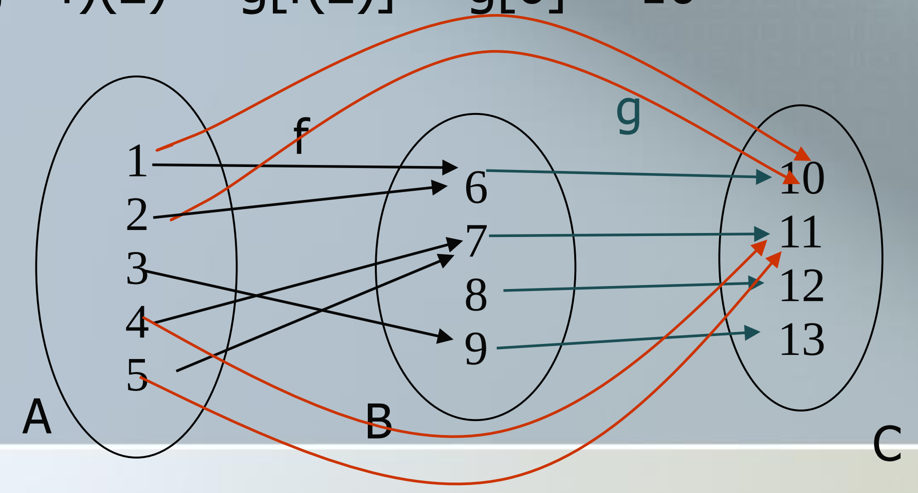
Relações e Funções

- **Composição de Funções Totais**
  - A composição das funções totais f: A→B e g: B → C é g • f: A → C, sendo que:
    - f = {(a,1), (b,2), (c,5), (d,5)}
    - g = {(1,x), (2,y), (3,y), (4,y), (5,z)}
    - g • f = {(a,x), (b,y), (c,z), (d,z)}
    - A composição das funções é mostrada no diagrama abaixo:



Relações e Funções

- **Composição de Funções**
  - Sejam f: A→B e g: B → C, então a função g • f: A → C, é uma função definida por (g • f)(a) = g[f(a)] onde a ∈ A.
  - Ex. 1: Sejam A={1,2,3,4,5}, B={6,7,8,9} e C={10,11,12,13}. Sejam f: A→B e g: B → C, definidas por:
    - f = {(1,6), (2,6), (3,9), (4,7), (5,7)}
    - g = {(6,10), (7,11), (8,12), (9,13)}
  - Então g • f = {(1,10), (2,10), (3,13), (4,11), (5,11)}
    - (g • f)(2) = g[f(2)] = g[6] = 10



Relações e Funções

- **Composição de Funções**
  - Ex. 2: Sejam f, g: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2+1$ e $g(x)=2x-3$. Quanto vale $(g \bullet f)(4)$?

    $(g \bullet f)(4) = g[f(4)] = g(4^2+1) = g(17) = 2(17)-3 = 31.$
  - De modo geral:

    $(g \bullet f)(x) = g[f(x)] = g(x^2+1) = 2(x^2+1) -3 = 2x^2+2-3 = \mathbf{2x^2- 1}$
  - Por que $g \bullet f$ e não $f \bullet g$?
    - A notação $g \bullet f$ significa que primeiro calculamos f e em seguida g (em $g \bullet f$ (a), f está "mais próximo" de (a)).
  - O domínio de $g \bullet f$ é o mesmo domínio de f.
  - A existência da função $g \bullet f$, não assegura a definição de $f \bullet g$.
    - Veja g(6) no Ex. 1.
  - Quando ambas são definidas, *geralmente* $g \bullet f \neq f \bullet g$.

Relações e Funções

- **Composição de Funções**
  - Ex. 3: Sejam $A=\{1,2,3,4,5\}$, $f: A \to A$ e $g: A \to A$, definidas por:
    - $f = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$
    - $g =\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$
  - Então $g \bullet f$ e $f \bullet g$ são:

$g \bullet f = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5), (5,5)\}$

$f \bullet g = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$

$\Rightarrow g \bullet f \neq f \bullet g$

- Exercício: Sejam $f, g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2+1$ e $g(x)=2x-3$. Mostre que:

a) $(g \bullet f)(4) \neq (f \bullet g)(4)$

b) $(g \bullet f)(x) \neq (f \bullet g)(x)$

Relações e Funções

- **Composição de Funções**
  - Associatividade – Sejam os conjuntos A, B, C e D e sejam f: $A \to B$, g: $B \to C$ e h: $D \to C$, então:

$\Rightarrow h \bullet (g \bullet f) = (h \bullet g) \bullet f$

$[h \bullet (g \bullet f)(a)] = h[(g \bullet f)(a)] = h[g[f(a)]]$

$[(h \bullet g) \bullet f](a) = (h \bullet g)[f(a)] = h[g[f(a)]]$

Logo: $h \bullet (g \bullet f) = (h \bullet g) \bullet f$