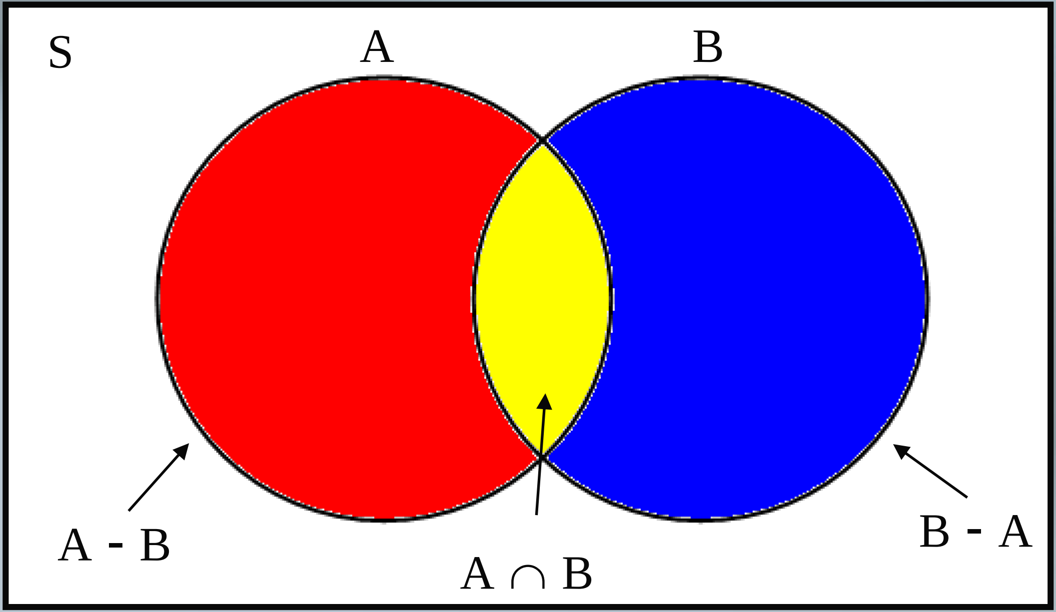
Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 09

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Este é mais um princípio utilizado para resolver problemas de contagem.
- Para desenvolvermos o princípio, observamos primeiro que, se A e B são subconjuntos de um conjunto universo S, então A-B, B-A e A$\cap$B são disjuntos, conforme a figura abaixo:



Se x $\in$ A - B,
então x $\notin$ B,
logo x $\notin$ B - A
e x $\notin$ A $\cap$ B

Ex. 01: Qual um outro nome para o conjunto $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$?

Princípio da Inclusão e Exclusão

- De $|A \cup B| = |A| + |B|$, estendido para os três conjuntos finitos disjuntos anteriores, obtemos:

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| \ (1)$$

- Temos também que $|A-B|=|A|-|A \cap B|$ e $|B-A|=|B|-|A \cap B|$
- Usando essas expressões com o resultado do Ex.01:

$|A \cup B|=|A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$, então:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \ (2)$$

Princípio da Inclusão e Exclusão para dois conjuntos.

- Ao contar o número de elementos na união de A e B, precisamos incluir o número de elementos de A e o de B, mas precisamos excluir os elementos de $A \cap B$ para evitar contá-los duas vezes.
- Se A e B forem disjuntos, então $|A \cap B|=0$.

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Ex. 02: Um pesquisador de opinião pública entrevistou 35 eleitores, todos apoiando o referendo 1, o referendo 2 ou ambos, e descobriu que 14 eleitores apóiam o referendo 1 e 26 apóiam o referendo 2. Quantos eleitores apóiam ambos?

$|A \cup B| = 35$, $|A| = 14$ e $|B| = 26$. Queremos $|A \cap B|$

Como $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, então

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14+26-35 = 5$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

- A equação do princípio de inclusão e exclusão pode ser estendida a 03 conjuntos, da seguinte maneira:

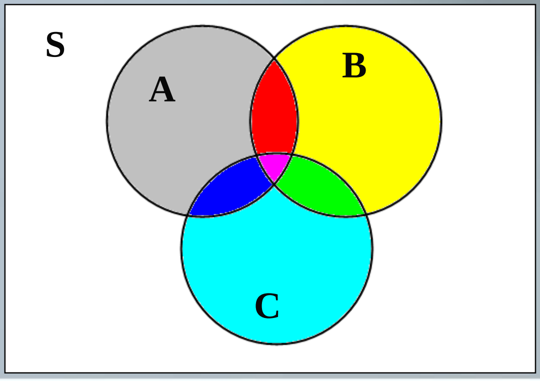
$$|A \cup B \cup C| = |A \cup (B \cup C)|$$
$$= |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)|$$
$$= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|)$$
$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- Então a equação do princípio de inclusão e exclusão para a 03 conjuntos é:

$$|A\cup B\cup C| =|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C| \quad (3)$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Além do argumento formal, podemos usar um argumento geométrico conforme a figura abaixo para $|A \cup B \cup C|$.
  - Quando somamos $|A| + |B| + |C|$, estamos contando cada elemento em $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ e $|B \cap C|$ duas vezes, de modo que temos que retirar cada um deles uma vez.
  - Nessa mesma soma, estamos contando cada elemento em $|A \cap B \cap C|$ três vezes, mas ao subtrairmos as interseções anteriores, eliminamos três vezes esses elementos, logo precisamos colocá-los de volta uma vez, somando $|A \cap B \cap C|$ ao final.



Princípio da Inclusão e Exclusão

- Ex. 03: Um grupo de estudantes está planejando encomendar pizzas. Se 13 comem pizza de calabresa, 10 comem de salame, 12 comem de queijo extra, 4 comem tanto calabresa quanto salame, 5 comem tanto salame quanto queijo extra, 7 comem tanto calabresa quanto queijo extra e 3 comem de tudo, quantos estudantes há no grupo?

Sejam:

A = {estudantes que comem calabresa}

B = {estudantes que comem salame}

C = {estudantes que comem queijo extra}

Então $|A|=13$, $|B|=10$, $|C|=12$, $|A \cap B| = 4$, $|B \cap C| = 5$, $|A \cap C| = 7$ e $|A \cap B \cap C| = 3$.

Da Eq. (3),

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 13 + 10 + 12 - 4 - 5 - 7 + 3 = 22$$

Princípio da Inclusão e Exclusão

- Esse problema poderia ser resolvido usando um diagrama de Venn.
  - Começando da parte de dentro para fora, sabemos que existem 3 pessoas em $A \cap B \cap C$ (fig. a).
  - Temos também o número das pessoas em $A \cap B$, $B \cap C$ e $A \cap C$ (fig. b).
  - Conhecemos também o tamanho de A, B e C (fig. c)
  - O número total de estudantes, 22, é obtido somando-se todos os elementos.

fig. a

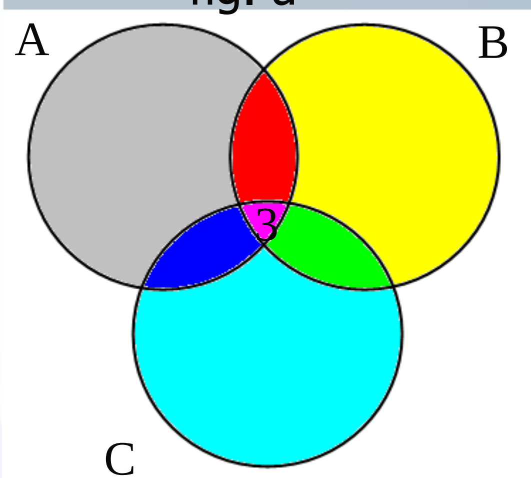


fig. b

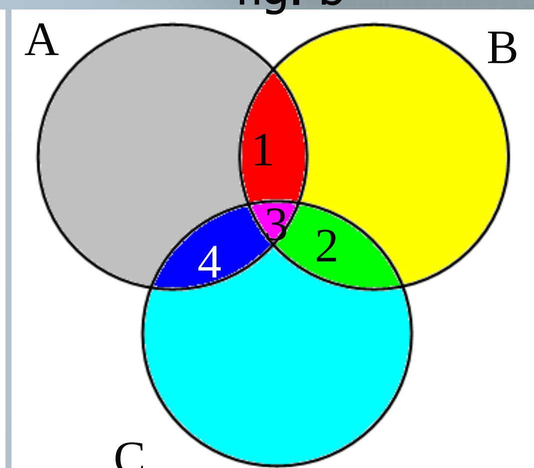
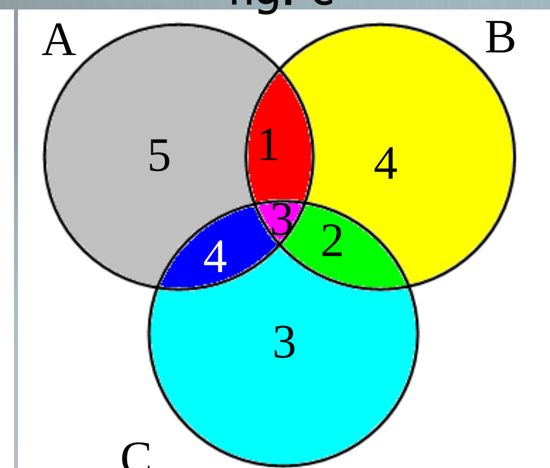


fig. c



Princípio da Inclusão e Exclusão

- Ex. 04: Um feirante vende apenas brócolis, cenoura e quiabo. Em um dia, o feirante atendeu 207 pessoas. Se 114 pessoas compraram brócolis, 152 compraram cenoura, 25 compraram quiabo, 64 compraram brócolis e cenoura, 12 compraram cenoura e quiabo e 9 compraram os três produtos, quantas pessoas compraram brócolis e quiabo?

Sejam

A = {pessoas que compraram brócolis}

B = {pessoas que compraram cenoura}

C = {pessoas que compraram quiabo}

Então $|A \cup B \cup C| = 207$, $|A| = 114$, $|B| = 152$, $|C| = 25$, $|A \cap B| = 64$, $|B \cap C| = 12$ e $|A \cap B \cap C| = 9$.

Da Eq. (3),

$$|A \cap C| = 114 + 152 + 25 - 64 - 12 + 9 - 207 = 17$$

Princípio das Casas de Pombo

- O princípio das casas de pombo recebeu esse nome exótico da seguinte ideia: se mais de *k* pombos entram em *k* casas de pombos, então pelo menos uma casa vai ter mais de um pombo.
- Embora isso pareça óbvio, podemos aprofundar esse ponto.
  - Suponha que cada casa contenha no máximo um pombo. Então existem no máximo *k* pombos e não os "mais de *k*" pombos que supostamente entraram nas casas.
- O princípio pode ser enunciado da seguinte forma:
- **Princípio das Casas de Pombo** - Se mais de *k* itens são colocados em *k* caixas, então pelo menos uma caixa contém mais de um item.
- Escolhendo corretamente itens e caixas, pode-se resolver vários problemas de contagem.

Princípio das Casas de Pombo

- Ex. 05: Quantas pessoas precisam estar presentes em uma sala para garantir que duas delas tenham o nome começando com a mesma letra?

O alfabeto (incluindo K, Y e W) tem 26 letras (caixas). Se a sala tiver 27 pessoas, então existem 27 iniciais (itens) para se colocar em 26 caixas, de modo que pelo menos uma caixa vai conter mais de uma inicial.

- Ex. 06: Quantas vezes é preciso jogar um dado de modo a garantir que um mesmo valor apareça duas vezes?