Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 08

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

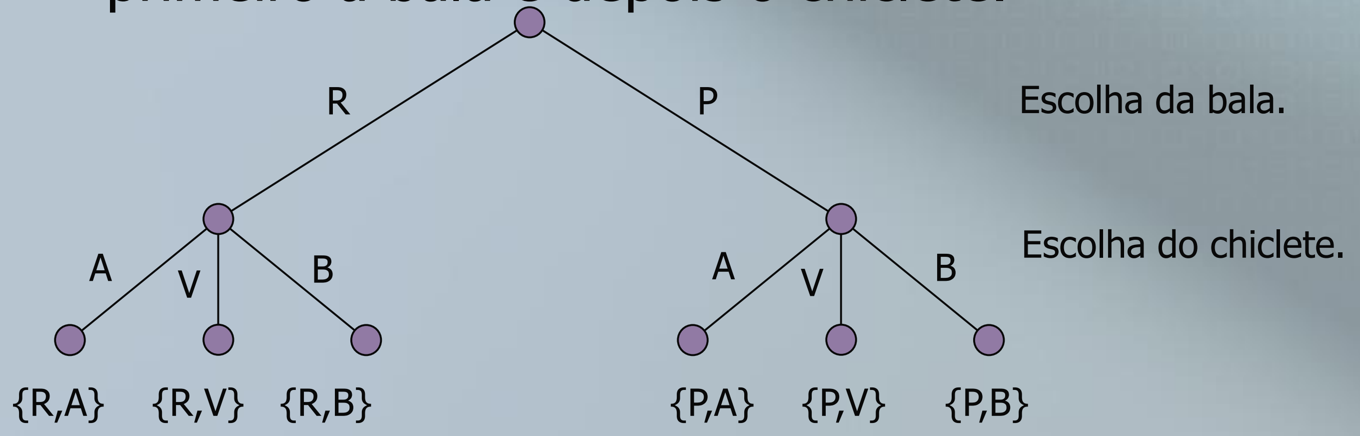
Contagem

- A **combinatória** é o ramo da matemática que trata de contagem.
- Problemas de contagem são importantes sempre que temos recursos finitos.
  - Quanto espaço de armazenamento um banco de dados usa?
  - Quantos usuários uma determinada configuração de servidor pode suportar?
- Problemas de contagem se resumem, muitas vezes, em determinar o número de elementos em algum conjunto finito.
  - Quantas linhas tem uma tabela-verdade com n letras de proposição?
  - Quantos subconjuntos tem um conjunto com n elementos?

Contagem

O Princípio da Multiplicação

- Muitos problemas de contagem podem ser resolvidos a partir de uma árvore de possibilidades.
- Ex.01: Uma criança pode escolher uma entre duas balas, uma rosa e outra preta, e um entre três chicletes, um amarelo, outro verde e outro branco. Quantos conjuntos diferentes a criança pode ter?
  - Podemos resolver o problema, separando a escolha dos doces em 2 etapas sequenciais: escolher primeiro a bala e depois o chiclete.



Contagem

O Princípio da Multiplicação

- Pela árvore anterior, percebe-se que existem 2 x 3=6 possibilidades: {R,A}, {R,V},{R,B}, {P,A}, {P,V} e {P,B}.
- Mesmo que a sequencia de eventos fosse trocada, o número de possibilidades seria o mesmo (3X2=6).
- O exemplo anterior ilustra o fato de que o número total de resultados possíveis para uma sequência de eventos pode ser obtido multiplicando-se o numero de possibilidades do primeiro evento pelo número do segundo.
- **Princípio da Multiplicação:** Se existem n_1 resultados possíveis para um primeiro evento e n_2 para o segundo, então existem $n_1.n_2$ resultados possiveis para a sequência dos dois eventos.

Contagem

O Princípio da Multiplicação

- Ex. 02: A última parte do seu número de telefone possui 04 dígitos. Quanto desses números de 04 dígitos existem?
  - A sequência de tarefas é: escolher o primeiro, depois o segundo, o terceiro e finalmente o quarto.
  - O primeiro pode ser escolhido entre 0 a 9, ou seja 10 dígitos, ou seja, há 10 possibilidades para a primeira opção.
  - As seguintes também terão cada uma 10 opções. Usando o princípio da multiplicação, devemos multiplicar essas possibilidades para cada tarefa.
  - 10 . 10 . 10 . 10 = 10.000 números diferentes.
- Se um elemento não puder ser usado de novo (não são permitidas repetições), o número de possibilidades é afetado.

Contagem

O Princípio da Multiplicação

- Ex. 03: Em relação ao exemplo anterior, quantas possibilidades existem se um mesmo dígito não puder ser repetido.

- Ex. 04: De quantas maneiras podemos escolher três representantes em um grupo de 25 pessoas?

- Ex. 05: Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, de quantas maneiras diferentes ele pode se vestir?

Contagem

O Princípio da Multiplicação

- Ex. 06: Para qualquer conjunto finito S, denote por |S| o número de elementos em S. Se A e B são conjuntos finitos, então |A X B| = |A|.|B|
  - A X B denota todos os pares ordenados com a primeira componente em A e a segunda em B.
  - Podemos formar tais pares ordenados como a sequência de duas tarefas: escolher a primeira componente, com |A| possibilidades e depois a segunda, com |B| possibilidades.
  - Esse resultado segue o princípio da multiplicação.

Contagem

O Princípio da Adição

- Suponha que queremos selecionar uma sobremesa entre três tortas e quatro bolos. De quantas maneiras isso pode ser feito?
  - Temos 02 eventos, um com 03 resultados possíveis e outro com 04.
  - No entanto, não temos uma sequência de dois eventos possíveis, já que somente uma sobremesa será escolhida.
  - O número de escolhas possíveis sera o número total de possibilidades que temos, 3+4=7. Isso ilustra o Princípio da Adição.
- **Princípio da Adição** – Se A e B são eventos disjuntos, com n_1 e n_2 resultados possíveis, respectivamente, então o número total de possibilidades para o evento A ou B é $n_1 + n_2$.
  - Este princípio pode ser usado sempre para contar o número total de possibilidades em casos disjuntos.

Contagem

O Princípio da Adição

- Ex. 07: Uma pessoa deseja comprar um veículo de uma concessionária, que tem 23 automóveis e 14 caminhões em estoque. Quantas escolhas possíveis a pessoa tem?
- Ex. 08: Sejam A e B conjuntos disjuntos. Então |Revisão Artigo Principia|=|A|+|B|.
  - Podemos encontrar $A \cup B$ separando em dois casos disjuntos. Primeiro conta-se os elementos de A, |A| e depois os de B, |B|.
- Ex. 09: Se A e B são conjuntos finitos, então,

  $|A-B|=|A|-|A \cap B|$ (I) e $|A-B|=|A|-|B|$ se $B \subseteq A$ (II)
  - Para provar a primeira identidade, note que

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B') \cup (A \cap B) \\ &= A \cap (B' \cup B) \\ &= A \cap S \\ &= A\end{aligned}$$

Contagem

O Princípio da Adição

- Ex. 10 (Cont.):Se A e B são conjuntos disjuntos, então,

  $|A-B|=|A|-|A\cap B|$ e $|A-B|=|A|-|B|$ se $B \subseteq A$

  - Então $A = (A - B) \cup (A \cap B)$, sendo que $(A - B)$ e $(A \cap B)$ são conjuntos disjuntos. Então, pelo exemplo 09:

    $|A| = |(A - B) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |A \cap B|$ ou

    $$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

  - A segunda equação segue da primeira, já que, se $B \subseteq A$, então $A \cap B = B$.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

Contagem

Usando os dois princípios juntos

- Os dois princípios são frequentemente usados juntos.
- Ex. 11: Tomando por base o exemplo 01, suponhamos que queremos encontrar de quantas maneiras diferentes a criança pode escolher o doce, ao invés do número de conjuntos de doces que ela pode ter.
  - Escolher uma bala rosa e depois um chiclete amarelo não é a mesma coisa que escolher um chiclete amarelo e depois uma bala rosa.
  - Podemos considerar dois casos disjuntos: a escolha das balas ou de chicletes primeiro.
  - Cada um desses casos, pelo princípio da multiplicação, tem 06 possibilidades.
  - Então, pelo princípio da adição, existem 6+6=12 maneiras diferentes de escolher os doces.

Contagem

Usando os dois princípios juntos

- Ex. 12: Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou 5?
- Ex. 13: Se uma mulher tem 07 blusas, 05 saias e 09 vestidos, de quantas maneiras diferentes ela pode se vestir?
- Um problema de contagem pode ser resolvido, muitas vezes, de mais de uma forma.
  - Uma segunda opção, embora possa causar confusão, é uma boa maneira de verificarmos o resultado obtido.
  - No Ex. 12, podemos não usar o princípio da adição, considerando o problema como dividido em 04 tarefas sucessivas. Para a primeira tarefa, escolher o primeiro dígito, tem 02 possibilidades – 4 ou 5. Para as demais, 10 possibilidades.
  - Existem, então 2.10.10.10 = 2.000 possibilidades.

Contagem

Usando os dois princípios juntos

- Ex. 14: Quantos inteiros de 03 dígitos (números entre 100 e 999) são pares?

Contagem

Árvores de Decisão

- Árvores como a mostrada no exemplo da escolha dos doces, que ilustram o número de possibilidades de um evento baseado em uma série de escolhas possíveis são chamadas de **árvores de decisão**.
  - O estudo de árvores será introduzido posteriormente, mas elas já podem ser usadas para resolver problemas de contagens adicionais.
- Árvores regulares são as que os números de resultados possíveis em qualquer nível da árvore é o mesmo em todo o nível, como as do exemplo mostrado.
- Árvores menos regulares podem ser usadas para resolver problemas de contagem onde a multiplicação não se aplica.

Contagem

Árvores de Decisão

- Ex. 15: Antonio está jogando moedas. Cada jogada resulta em cara(C) ou coroa(K). Quantos resultados possíveis ele pode obter se jogar 05 vezes sem cair 02 caras consecutivas?
  - Cada jogada da moeda tem dois resultados possíveis; o ramo da esquerda está marcado com um C, denotando cara, e o da direita, com um K, denotando coroa.
  - Veremos, na árvore a seguir, que existem 13 possibilidades.

Contagem

Árvores de Decisão