Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 07

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Teoria dos Conjuntos

- Conjunto não se define formalmente. Usa-se uma ideia intuitiva de que se trata de uma coleção de objetos.
  - Esses objetos de um conjunto possuem alguma propriedade em comum.
- Notação – Usa-se letras maiúsculas para denotar conjuntos e o símbolo $\in$ para designar a pertinência em um conjunto.
  - Assim, **a** $\in$ **A** significa que **a** pertence ao conjunto A ou é um elemento do conjunto A.
  - Da mesma forma, **b** $\notin$ **A** signfica que b não pertence a A.
- Usamos chaves para indicar um conjunto.
  - Se A = {azul, verde, branco}, então verde $\in$ A e preto $\notin$ A.
  - Os elementos em um conjunto não tem nenhuma ordem, de modo que {azul, verde, branco} é o mesmo que {branco, azul, verde}.

Teoria dos Conjuntos

Notação

- Dois conjuntos são iguais se contêm os mesmos elementos. Usando a notação da lógica de predicados, temos:
  - A = B significa $(\forall x)[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)]$
- Ao descrever um conjunto particular, temos que identificar seus elementos.
- Para um **conjunto finito** (com n elementos para n > 0), isso é feito listando-se todos os seus elementos.
- Para um **conjunto infinito,** podemos indicar a forma geral listando os primeiros elementos.
  - S é o conjunto de todos os inteiros positivos pares, então S={2, 4, 6,…}.
  - S também pode ser definido por recorrência, explicitando um dos elementos de S e descrevendo os demais em termos dos elementos já conhecidos.

1. $2 \in S$
2. Se $n \in S$, então $(n+2) \in S$.

Teoria dos Conjuntos

- Mas, a maneira mais clara de se descrever esse conjunto S é através da propriedade que caracteriza os elementos do conjunto em palavras, isto é:
  - S = { x | x é um inteiro positivo par}
- Então, podemos descrever um conjunto das seguintes maneiras, dentre outras:
  - Listar (total ou parcialmente) seus elementos.
  - Usar recorrência para descrever como gerar seus elementos.
  - Descrever uma propriedade P que caracteriza seus elementos.
- A notação para um conjunto cujos elementos é caracterizado por uma propriedade P é { x | P(x)}, onde P(x) é um predicado unário (única variável).
- A notação baseada na lógica formal torna mais claro a propriedade que caracteriza os elementos de um conjunto.

  $S = \{ x \mid P(x)\}$ significa que $(\forall x)[(x \in S \rightarrow P(x)) \wedge (P(x) \rightarrow x \in S]$

Teoria dos Conjuntos

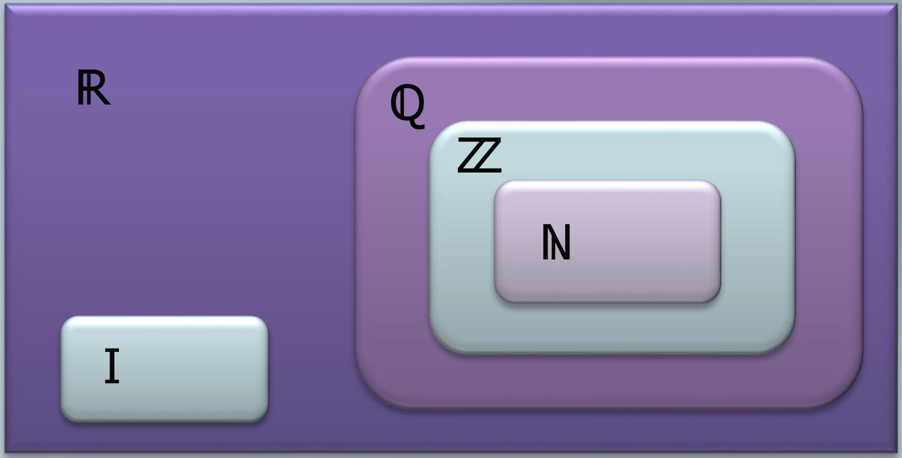
- Ex.01: Descreva cada um dos conjuntos a seguir listando seus elementos:
  a) $\{ x \mid x \text{ é um inteiro e } 3 < x \leq 7\}$
  b) $\{ x \mid x \text{ é um mês com exatamente 30 dias}\}$

- Ex.02: Descreva cada um dos conjuntos a seguir através de uma propriedade que caracterize seus elementos:
  a) $\{1, 4, 9, 16\}$
  b) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

Teoria dos Conjuntos

- É conveniente usarmos uma notação padrão para determinados conjuntos, de modo que se possa se referir mais facilmente a eles.

$\mathbb{N}$= Números naturais
$\mathbb{Z}$=Números inteiros
$\mathbb{R}$= Números reais
$\mathbb{Q}$= Números racionais
I = Números Irracionais



Teoria dos Conjuntos

- O Conjunto vazio é denotado por $\varnothing$ ou por { }.
  - Por exemplo, se $S = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x<0\}$, então $S = \varnothing$.
  - Note que $\varnothing \neq \{\varnothing\}$

- Ex. 03: Seja um conjunto A dado por:

$$A = \{x \mid (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \text{ e } x=y^3\}.$$

  - Esse conjunto é da forma $A=\{x|P(x)\}$.
  - Encontra-se cada elemento de A atribuindo-se a y cada um dos valores e elevando-os ao cubo.
  - Então $A = \{0, 1, 8\}$.
- Ex. 04: Seja um conjunto B dado por:

$$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\exists y)(y \in \mathbb{N} \text{ e } x \leq y\}.$$

  - Para y=0, x=0; para y=1, x=0 ou 1; para y=2, x=0, 1 ou 2....
  - B consiste em todos os inteiros não negativos menores ou iguais a um inteiro não negativo.

Teoria dos Conjuntos

- Ex. 05: Seja um conjunto C dado por:

$$C = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y\}.$$

  - Dessa forma, obtemos $C=\{0\}$.
  - 0 é o único inteiro não-negativo que é menor ou igual a todos os inteiros não-negativos.
- Ex. 06: Descreva cada um dos conjuntos a seguir:
  - $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } (\forall y)(y \in \{2, 3, 4, 5\}) \rightarrow x \geq y\}.$
  - $B = \{x \mid (\exists y)(\exists z)(y \in\{1,2\} \text{ e } z \in\{2,3\} \text{ e } x=y+z)\}.$

Teoria dos Conjuntos

Relações entre conjuntos

- Para A={2, 3, 5, 12} e B={2, 3, 4, 5, 9, 12}, todo elemento de A é, também, elemento de B.
  - A é um subconjunto de B
  - Definição: $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$
- Se A é um subconjunto de B, então $\mathbf{A \subseteq B}$.
  - Se $A \subseteq B$ mas $A \neq B$, então A é um **subconjunto próprio** de B, e escrevemos $\mathbf{A \subset B}$.
  - Use a notação da lógica formal para definir $\mathbf{A \subset B}$.
- Ex. 07: Sejam A={1, 7, 9, 15}, B={7, 9} e C={7, 9, 15, 20}, então as seguintes proposições são verdadeiras (entre outras):

$\mathbf{B \subseteq C}$	$\mathbf{15 \in C}$
$\mathbf{B \subseteq A}$	$\mathbf{\{7, 9\} \subseteq B}$
$\mathbf{B \subset A}$	$\mathbf{\{7\} \subset A}$
$\mathbf{A \nsubseteq C}$	$\mathbf{\varnothing \subseteq C}$

Teoria dos Conjuntos

Ex. 08: Sejam A = $\{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x \geq 5\}$,
B = $\{10, 12, 16, 20\}$ e C = $\{x \mid (\exists y)(y \in \mathbf{N} \text{ e } x = 2y)\}$
Quais das proposições abaixo são verdadeiras:

a. $B \subseteq C$

b. $B \subset A$

c. $A \subseteq C$

d. $26 \in C$

e. $\{11, 12, 13\} \subseteq A$

f. $\{11, 12, 13\} \subset C$

g. $\{12\} \in B$

h. $\{12\} \subseteq B$

i. $\{x \mid x \in \mathbf{N} \text{ e } x < 20\} \not\subseteq B$

j. $5 \subseteq A$

k. $\{\emptyset\} \subseteq B$

l. $\emptyset \notin A$

Teoria dos Conjuntos

Conjuntos de Conjuntos

- Para um conjunto S, podemos formar um novo conjunto cujos elementos são subconjuntos de S.
  - Esse novo conjunto é chamado de **conjunto das partes** de S e é denotado por $\wp(S)$.
  - Para S={0,1}, $\wp(S) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.
  - Os elementos do conjunto das partes de S são conjuntos.
  - Para qualquer conjunto S, $\wp(S)$ sempre tem, pelo menos $\varnothing$ e S como elementos, já que é sempre verdade que $\varnothing \subseteq S$ e $S \subseteq S$.
  - Para encontrar $\wp(S)$, comece com $\varnothing$, depois coloque os conjuntos formados por 1 elemento de S, depois ao formados por 2 elementos de S, por 3 e assim por diante, até o próprio S.

Teoria dos Conjuntos

Conjuntos de Conjuntos

- Ex.09:Para A={1,2,3}, encontre $\wp$(A). Observe que o número de elementos de $\wp$(A) é igual a 2^n, onde n é o numero de elementos de A.

Teoria dos Conjuntos

Operações em Conjuntos

- A maior parte das operações que envolvem números podem ser efetuadas também em conjuntos.
- Dado um conjunto S, podemos definir operações no conjunto $\wp$(S).
  - S, nesse caso, é chamado de **conjunto universo**, que define o contexto dos objetos em discussão.
  - Se S= $\mathbb{Z}$, então os subconjuntos conterão apenas inteiros.
- Operação unária e binária
  - Unária: quando age em apenas um elemento do conjunto (por exemplo, uma negação de um elemento).
  - Binária: quando acontece em dois inteiros do conjunto (por exemplo, uma subtração).

Teoria dos Conjuntos

Operações em Conjuntos

- Uma operação binária em $\wp(S)$ tem agir em dois subconjuntos de S para produzir um único subconjunto de S. Isso pode acontecer de duas maneiras naturais:
  - Seja S o conjunto de todos os estudantes da UNIVASF. Então elementos de $\wp(S)$ são conjuntos de estudantes.
  - Seja A o conjunto de estudantes de Administração e B os de Computação. Ambos pertencem a $\wp(S)$.
  - Um novo conjunto pode ser definido por todos os alunos que são de administração ou de computação (ou de ambos). Esse conjunto é a **união** de A e B.
  - Outro conjunto pode ser definido pelos alunos que estudam simultaneamente administração e computação. Esse conjunto (que pode ser vazio) é chamado a **interseção** de A e B.

Teoria dos Conjuntos

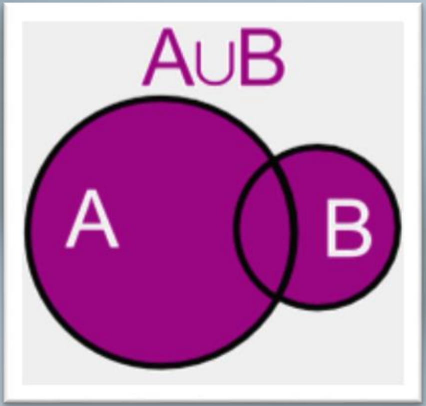
Operações em Conjuntos

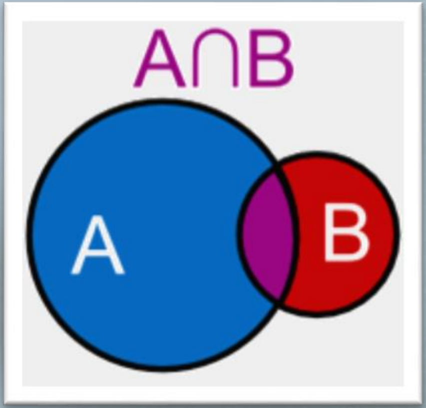
- Definições: Sejam A e B $\subseteq \wp(S)$.
  - A **União** de A e B, denotada por $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$ é $\{x \mid x \in A$ **ou** $x \in B\}$
  - A **Interseção** de A e B, denotada por $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ é $\{x \mid x \in A$ **e** $x \in B\}$
- Ex. 10: Sejam $A=\{1,3,5,7,9\}$ e $B=\{3,5,6,10,11\}$, com A e B sendo $\wp(\mathbb{N})$.
  - Então $A \cup B$ é $=\{1,3,5,6,7,9,10,11\}$ e $A \cap B =\{3,5\}$. Ambos são $\wp(\mathbb{N})$.
- Ex. 11: Sejam A e B $\in \wp(S)$ Para um conjunto arbitrário S. É sempre verdade que $A \cap B \subseteq A \cup B$?

Teoria dos Conjuntos

Operações em Conjuntos

- Diagramas de Venn – usados para representação visual das operações entre conjuntos.





- **Complemento de um conjunto.**
  - Para um conjunto $A \in \wp(S)$, o complemento de A, A′ é $\{x \mid x \in S \text{ e } x \notin A\}$.
- Ex. 12: Ilustre A′ como um Diagrama de Venn.
- Ex. 12a: conjunto da busca "carros usados" E (Mercedes OU Volks) E NÃO Caminhões.

Teoria dos Conjuntos

Operações em Conjuntos

- **Diferenças entre conjuntos** – Uma outra operação binária em conjuntos A e B $\in \wp(S)$ é a diferença entre conjuntos $A - B=\{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.
  - Essa operação pode ser reescrita como $A\text{-}B=\{x \mid x \in A \text{ e } x \in B'\}$ ou como $A - B=A \cap B'$.

- Ex. 13: Ilustre A-B como um Diagrama de Venn.

- Dois conjuntos são ditos **disjuntos** quando $A \cap B = \emptyset$.
  - Então $A – B$ e $B – A$, por exemplo, são disjuntos.
- Ex. 14: Sejam $A=\{1,2,3,5,10\}$, $B=\{2,4,7,8,9\}$, $C=\{5,8,10\}$, subconjuntos de $S=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Encontre:

a) $A \cup B$ b) $A – C$ c) $B' \cap (A \cup C)$

Teoria dos Conjuntos

Operações em Conjuntos

- **Produto Cartesiano** – Sejam os subconjuntos A e B de S. O produto cartesiano de A e B, denotado por A X B, é definido por:
  - $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$.
  - Os elementos do resultado não pertencem a S mas são pares ordenados de elementos de S.
  - O produto A X A é denotado por A^2.
  - A^n denota o conjunto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de elementos de A.
- Ex. 15: Sejam A={1,2} e B={3,4}. Encontre:

  a) A X B   b) B X A   c) A^2 d)A^3

Teoria dos Conjuntos

Identidades básicas envolvendo Conjuntos

- Existem várias igualdades entre conjuntos nas operações de união, interseção, diferença e complementação.
- Essas igualdades são independentes dos subconjuntos particulares utilizados e são chamadas de identidades.
  - Essas identidades são semelhantes às equivalências tautológicas da lógica formal.

1a. $A \cup B = B \cup A$ — 1b. $A \cap B = B \cap A$ (comutatividade)

2a. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ — 2b. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associatividade)

3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ — 3b. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributividade)

4a. $A \cup \varnothing = A$ — 4b. $A \cap S = A$ (existência de elemento neutro)

5a. $A \cup A' = S$ — 5b. $A \cap A' = \varnothing$ (propriedades do complemento)

Note que 2a e 2b nos permitem eliminar os parênteses.

Teoria dos Conjuntos

Identidades envolvendo Conjuntos

- Provando identidades:

Ex. 16: 3a. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Queremos então provar que

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

e que

$$(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$$

Podemos, então proceder da seguinte maneira:

(seja x um elemento arbitrário de $A \cup (B \cap C)$):

$$
\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) &\rightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \\
&\rightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ e } x \in C) \\
&\rightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \text{ e } x \in (A \cup C) \\
&\rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)
\end{aligned}
$$

Para mostrarmos que $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$, basta fazer o argumento de trás para frente.

Teoria dos Conjuntos

Identidades envolvendo Conjuntos

- Provando identidades: Ex. 17:

4a. $A \cup \varnothing = A$

- Ex. 18: Use as identidades básicas para provar que:

$$[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \varnothing$$

para A, B e C subconjuntos arbitrários de S.

- Na demonstração a seguir, o número à direita denota a identidade básica usada em cada passo.

$[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)')$

$= ([A \cup (B \cap C)] \cap [A' \cup (B \cap C)]) \cap (B \cap C)'$ **(2b)**

$= ([(B \cap C) \cup A] \cap [(B \cap C) \cup A']) \cap (B \cap C)'$ **(1ª - 2 vezes)**

$= [(B \cap C) \cup (A \cap A')] \cap (B \cap C)'$ **(3a)**

$= [(B \cap C) \cup \varnothing] \cap (B \cap C)'$ **(5b)**

$= (B \cap C) \cap (B \cap C)'$ **(4a)**

$= \varnothing$ **(5b)**

Teoria dos Conjuntos

Identidades envolvendo Conjuntos

- A,B e C são subconjuntos de S. Demonstre a seguinte identidade usando as identidades básicas de conjuntos.

$$[A \cap (B \cup C)] \cup ([A' \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)') = S$$

Teoria dos Conjuntos

Identidades envolvendo Conjuntos

- O **dual** de cada identidade é obtida permutando-se $\cup$ com $\cap$ e S com $\emptyset$. O dual da identidade do exemplo 18: $[A \cup (B \cap C)] \cap ([A' \cup (B \cap C)] \cap (B \cap C)') = \emptyset$ é

  $[A \cap (B \cup C)] \cup ([A' \cap (B \cup C)] \cup (B \cup C)') = S$
- Essa identidade também pode ser provada substituindo cada identidade básica pela sua dual.
- Ex.19: Usando as identidades básicas, prove a identidade:

$$[C \cap (A \cup B)] \cup [(A \cup B) \cap C'] = A \cup B$$

(A, B e C são subconjuntos arbitrários de S.)

- Ex. 20: Enuncie a identidade dual do exemplo anterior.
- Ex. 21: Usando as identidades básicas, prove a identidade:

$$(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$$

Teoria dos Conjuntos

Resumo dos métodos para provar identidades envolvendo conjuntos

Método	Comentário
Desenhe um diagrama de Venn	Não é um bom plano, já que nenhum diagrama vai cobrir todos os casos e não demonstrará a identidade no caso geral.
Prove a inclusão em cada direção	Tome um elemento arbitrário de um dos termos da identidade e mostre que ele pertence ao outro termo, e reciprocamente.
Use identidades já demonstradas	Verifique se a forma da expressão é exatamente igual à forma da identidade que você quer usar.