Matemática Discreta - 06

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Recursividade e relações de recorrência

Recursividade e Relações de Recorrência

Definições Recorrentes

- Uma definição onde o item a ser definido aparece como parte da definição é chamada de **definição recorrente** ou **definição por recorrência** ou ainda **definição por indução.**
- Como definir algo em torno de si mesmo?
  1. Uma base, ou condição básica, onde alguns casos simples (pelo menos um) do item que está sendo definido são dados explicitamente.
  2. Um passo de indução ou recorrência, onde novos casos do item que está sendo definido são dados em função dos casos anteriores.
- O item 1 nos dá o começo, fornecendo casos simples e concretos.
- O item 2 nos permite construir novos casos, a partir dos simples e ainda outros casos a partir desses novos e assim por diante.

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Uma sequência S é uma lista de objetos que são numerados em uma determinada ordem.
  - Existe um primeiro objeto, um segundo e assim por diante.
  - S(k) denota o k-ésimo objeto da sequência.
  - Uma sequência é definida por recorrência nomeando-se o primeiro valor (ou alguns primeiros) na sequência e depois definindo os demais valores subsequentes em termos dos valores anteriores.

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Ex. 01:A seqüência S é definida por recorrência por
  1. $S(1) = 2$
  2. $S(n) = 2S(n-1)$ para $n \geq 2$

  Pela proposição 1, $S(1) = 2$. Depois, pela proposição 2, o segundo objeto em S é $S(2) = 2S(1) = 2(2)=4$.

  Novamente, pela proposição 2, $S(3)=2S(2) = 2(4) = 8$.

  Continuando desse modo, vemos que a sequência S é:

  2, 4, 8, 16, 32...
- Uma regra como a da proposição 2, que define um valor de uma sequência em termos de um ou mais valores anteriores é uma **relação de recorrência**.

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Ex. 02:A seqüência T é definida por recorrência por
  1. $T(1) = 1$
  2. $T(n) = T(n-1) + 3$ para $n \geq 2$
  - Escreva os cinco primeiros valores da sequência T.
- Ex. 03: A famosa sequência de Fibonacci é uma sequência de números definida por recorrência por:

  $F(1) = 1$

  $F(2) = 1$

  $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$, para $n>2$
  - Nesse caso, são dados os dois primeiros valores e relação de recorrência define o n-ésimo valor em termos dos dois valores precedentes.
  - Na sua forma mais geral, a relação de recorrência é a soma de F em seus dois valores anteriores.
- Ex. 04: Escreva os oito primeiros valores da sequência de Fibonacci.

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Ex. 05: Prove **diretamente** que, na sequência de Fibonacci, a fórmula $F(n+4)=3F(n+2) - F(n)$, para todo $n \geq 1$, é verdadeira.

A relação de recorrência da sequência de Fibonacci pode ser escrita como: $F(n+2)=F(n)+F(n+1)$ ou,

$F(n+1) = F(n+2) - F(n)$ (1)

Logo, $F(n+4)=F(n+2)+F(n+3)$

$F(n+4)=F(n+2)+F(n+2)+F(n+1)$ //Reescrevendo $F(n+3)$

$F(n+4)=F(n+2)+ F(n+2)+[F(n+2)-F(n)]$ // de (1)

$F(n+4)=3F(n+2)-F(n)$

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Ex. 06: Prove **diretamente** que, na sequência de Fibonacci, a fórmula $F(n+1)+F(n-2) = 2F(n)$, para todo $n \geq 3$, é verdadeira.

Da relação de Recorrência:

$F(n+1)=F(n-1) + F(n)$ e

$F(n)=F(n-1)+F(n-2)$

$= F(n-1)+F(n) + F(n-2) = [F(n-1)+F(n-2)] + F(n)$

$=F(n)+ F(n) = 2F(n)$

Observar que só é válida porque $n \geq 3$.

Recursividade e Relações de Recorrência

Sequências definidas por Recorrência

- Ex. 07: Prove **diretamente** que, na sequência de Fibonacci, a fórmula $F(n+3)=2F(n+1) + F(n)$, para todo $n \geq 1$, é verdadeira.

Recursividade e Relações de Recorrência

Operações definidas por Recorrência

- Certas operações comuns em objetos podem ser definidas de forma recorrente, conforme os exemplos a seguir:
- Ex. 08: Uma definição recorrente da operação de exponenciação a^n de um número real não nulo a, onde n é um inteiro não negativo é:
  1. $a^0=1$
  2. $a^n=(a^{n-1})a$ para $n\geq1$
- Ex. 09: Uma definição recorrente para a multiplicação de dois inteiros positivos m e n é:
  1. $m(1) = m$
  2. $m(n) = m(n-1) + m$ para $n\geq2$