Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 05

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Indução

Primeiro Princípio de Indução

- Imagine que você está subindo uma escada infinitamente alta. Como você será capaz de saber se será capaz de chegar a um degrau arbitrariamente alto?
  - Você pode inicialmente fazer as seguintes hipóteses sobre a sua capacidade de subir:

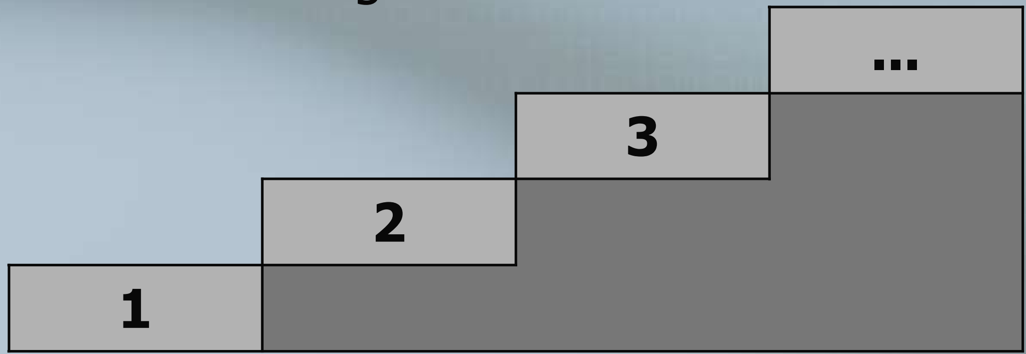
  1. Você consegue alcançar o primeiro degrau.
  2. Uma vez chegado a um degrau, você sempre será capaz de chegar ao próximo.

  - Se a proposição 1 e o condicional 2 são verdadeiros, então, pela proposição 1, você consegue chegar no primeiro degrau e, portanto, pela 2, consegue chegar no segundo. Novamente pela 2, consegue chegar no terceiro.
  - Mais uma vez, pela 2, chega no quarto degrau e assim por diante.
  - Você poderá subir tão alto quanto quiser.

Indução

Primeiro Princípio de Indução

- Nesse caso, ambas as hipóteses são necessárias. Se apenas a primeira fosse V, não teríamos a garantia de passar do primeiro degrau.
  - Se apenas a 2ª fosse V, poderíamos não ser capazes de começar nunca.
- Numerando os degraus...



- Seja uma propriedade de que cada número que identifica o degrau possa ter.
  - Ao invés de chegar a um degrau arbitrário, podemos buscar um número inteiro positivo que tenha essa propriedade.

Indução

Primeiro Princípio de Indução

- Usando a notação P(n) para dizer que o inteiro positivo n tem a propriedade P.
- Por analogia, vamos usar a mesma "técnica" usada para subir a escada, para provar que, qualquer que seja o inteiro positivo n, temos P(n).
  - Precisamos provar as proposições:
  1. P(1) - (1 tem a propriedade P)
  2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k+1)$ – Se qualquer número tem a propriedade P, o próximo também tem.
- Se pudermos provar ambas as proposições 1 e 2, então P(n) é válida para qualquer inteiro positivo n.
- O fundamento para argumentos desse tipo é o **primeiro princípio de indução matemática.**

Indução

Primeiro Princípio de Indução

1. **P(1)**
2. **(∀k) [P(k) verdade → P(k+1) verdade]**

P(n) é verdade para todo inteiro positivo n

- O primeiro princípio de indução matemática é um condicional, com uma conclusão na forma "P(n) é verdade para todo inteiro positivo n".
  - A técnica da indução se mostra mais apropriada para provarmos que alguma coisa é verdade para todo inteiro positivo n (conjunto dos números naturais).

Indução

Primeiro Princípio de Indução

1. P(1)
2. $(\forall k)$ [P(k) verdade $\rightarrow$ P(k+1) verdade]

- Para mostrar que a conclusão dessa condicional é verdadeira, precisamos provar que as hipóteses 1 e 2 são.
  - Para provar a proposição 1, basta mostrar que o número 1 tem a propriedade P, o que pode ser trivial (**Base da Indução**).
  - A proposição 2 é um condicional que tem que ser válido para todo k (**Passo da Indução**).
  - Para provar essa condicional, suponha que P(k) (**Hipótese da Indução**) é verdade para um inteiro positivo k e mostre que, baseado nesta hipótese, que p(k+1) é verdade.

Indução

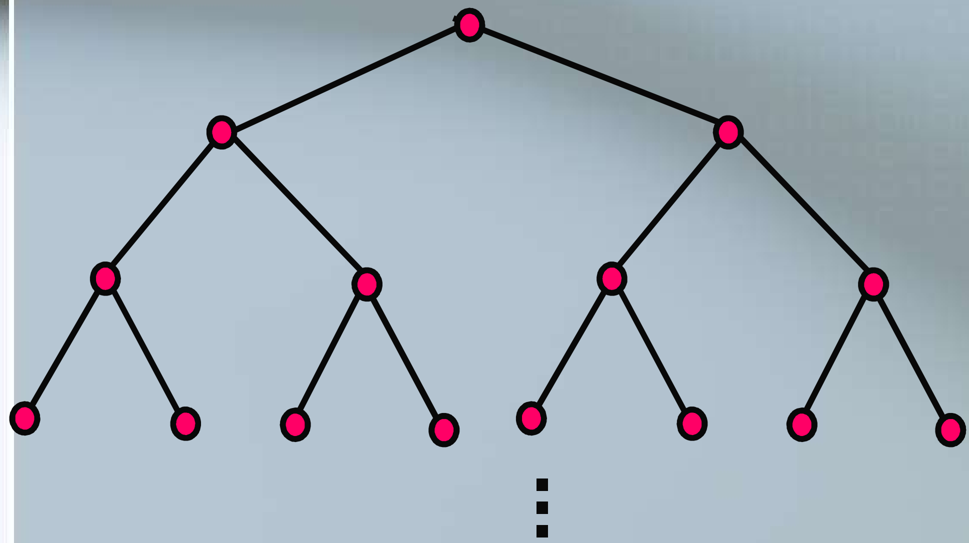
Primeiro Princípio de Indução - Resumo

1. Passo 1 – Prove a base da indução P(1) (ou o menor inteiro positivo em questão).
2. Passo 2 – Suponha P(k)
3. Passo 3 – Prove P(k+1)

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 01:Suponha a árvore genealógica de uma família cuja característica fundamental é que cada casal tem sempre dois filhos e que cada um desses filhos também tem dois filhos. A árvore é ilustrada abaixo:



Geração	Descendentes
1	$2^1=2$
2	$2^2=4$
3	$2^3=8$
...	...

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Há de se perceber que a geração n contém 2^n descendentes. Precisamos demonstrar essa propriedade.
- Formalmente, se denotarmos por P(n) o número de descendentes em cada geração, nossa conjectura é que:

$$P(n) = 2^n$$

- Vamos usar a indução para provar que a conjectura está correta.

1. O passo básico é estabelecer P(1), que é a equação:
2. Isso é verdadeiro pois o primeiro elemento da genealogia teve 02 filhos. $P(1) = 2^1 = 2$
3. Supondo agora que a conjectura está correta para uma geração arbitrária k, $k \geq 1$:

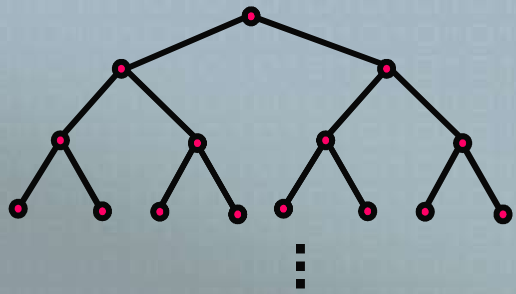
$P(k) = 2^k$ - Hipótese da indução

Vamos mostrar que $P(k+1) = 2^{k+1}$

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- $P(k) = 2^k$ - Hipótese da indução
- Vamos mostrar que $P(k+1) = 2^{k+1}$
- Nessa família, cada descendente tem 2 filhos, de modo que o número de descendentes na geração k+1 será o dobro da geração k.
  - Ou seja $P(k+1) = 2P(k)$
- Pela hipótese de indução:



$$P(k) = 2^k$$

$$P(k+1) = 2P(k) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

De fato, $P(k+1) = 2^{k+1}$

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 02: Sejam as seguintes definições:

$$2^0 = 1 = 2^1 - 1$$

$$2^0 + 2^1 = 1 + 2 = 3 = 2^2 - 1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7 = 2^3 - 1$$

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 1 + 2 + 4 + 8 = 15 = 2^4 - 1$$

- No exemplo acima o padrão mais geral parece com:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

- Mas, não podemos afirmar que este padrão será sempre verdadeiro para todos os valores de *n* a menos que provemos.
- Prove que para todo número inteiro positivo n,

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 02: $2^0 + 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- Pelo princípio da indução:

P(1) é a equação $1 + 2 = 2^{1+1} - 1$ ou $3 = 2^2 - 1$ (**base da indução**)

- Supondo P(k) como **hipótese de indução**:

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

- Provar que P(k+1) é verdadeira:

$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1$

Considerando a soma à esquerda $\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k} + 2^{k+1}$

Usando a hipótese de indução: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

em p(k+1):

$= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1}$

$= 2(2^{k+1}) - 1$

$= 2^{k+1+1} - 1$

Portanto P (k+1): $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1$

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 03: Demonstre que, para qualquer n, $2^n > n$.

1. Base da indução: **$P(1) = 2^1 = 2$**, então $2>1$ (verdadeira)
2. Hipótese da indução: supondo que para algum k inteiro positivo, **$P(k): 2^k > k$** é verdadeira.
3. Passo da indução: Provar que **$P(k+1): 2^{k+1} > k+1$** é verdadeira.
4. Como **$P(k): 2^k > k$** e **$P(k+1): 2^{k+1} > k+1$**, então, à esquerda da desigualdade temos que:

$$2^{k+1} = 2^k.2^1$$

Pela hipótese de indução **$2^k > k \ (x2) = 2^k.2^1 > k.2$**
$2^{k+1} > k.2$, como $k.2=k+k$ e **$k+k \geq k+1$**, então,

$$2^{k+1} > k+k \geq k+1 \text{ ou seja, } 2^{k+1} > k+1$$

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 04: Prove por indução que a soma dos n primeiros números naturais é dada por $P(n) = n(n+1) / 2$
- Temos: $P(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n + 1) / 2$

1. Base da indução: $P(1) = 1 (1 + 1) / 2 = 1$
2. Hipótese da indução: $P(k)$: $1 + 2 + 3 + ... + k = k(k + 1)/2$
3. Devemos mostrar quer

$P(k+1) = 1+2+3+ ... + k + (k + 1)=[(k+1)(k+1+1)]/2$

Usando a hipótese de indução, vamos substituir na expressão acima, o valor de P(k), teremos:

$P(k + 1) = k (k + 1) / 2 + (k + 1) =[(k+1)(k+1+1)]/2$

Desenvolvendo o lado esquerdo, fica:

$P(k +1) = [k(k+1)/2]+(k+1) = [k (k + 1) + 2(k + 1)] / 2$

$= [(k + 1) (k + 2)] / 2 = [(k+1)(k+1+1)]/ 2$

que é a mesma fórmula para (k+1).

Logo, $P(n) = n (n+1) / 2$ é verdadeira para todo n natural.

Indução

Demonstração por Indução Matemática

- Ex. 05: Prove por indução, que para todo número inteiro positivo n, $2+4+6+\ldots+2n = n(n+1)$