Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 04

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

Teoremas e Demonstrações Informais

- Os argumentos lógicos formais tem a forma $P \rightarrow Q$, onde P e Q podem representar proposições compostas.
  - Temos que demonstrar a validade do argumento.
- As vezes temos que provar argumentos que não são universalmente verdadeiros, sendo apenas em certos contextos.
  - Temos que provar que, se P é verdadeiro nesse contexto, Q também o é.
- Se pudermos provar essa condição, então $P \rightarrow Q$ torna-se um **teorema** sobre aquele assunto.
- Os teoremas podem ser enunciados e demonstrados de maneira menos formal do que usando argumentos da lógica formal.

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

- Um **teorema** é uma proposição que é garantida por uma prova.
- Um **axioma** é uma proposição que se assume como verdadeira e que não precisa de prova.
- Uma **conjectura** é uma proposição que ainda não foi provada e nem refutada.

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

Provar ou Não Provar

- **Raciocínio indutivo** – Algo que se conclui baseado na experiência.
  - Por exemplo, observando que, em diversos casos nos quais sempre P é verdade, Q também o é, formula-se uma **conjectura**: Quanto mais verifica-se que Q segue de P, mais confiante que a conjectura é verdadeira.
- **Raciocínio dedutivo** – Verificação de fato se a conjectura é verdadeira.
  - Produzir uma demonstração que $P \rightarrow Q$, transformando a conjectura em um teorema.
  - Ou encontrando um **contra-exemplo**, mostrando que a conjectura está errada, com um caso onde P é verdadeiro e Q é falso.
- Não é simples a decisão de qual a abordagem: provar ou buscar um contra-exemplo.

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

Provar ou Não Provar

- Ex. 01: Para um inteiro positivo n, **n!** é definido com sendo n(n-1)(n-2)...1. Prove ou encontre um contra-exemplo para a conjectura "para todo inteiro positivo **n, n!** $\leq$ **n²**.
- Testa-se alguns casos:

n	n!	n^2	$n! \leq n^2$
1	1	1	V
2	2	4	V
3	6	9	V

Os casos verdadeiros não provam a validade

- Até agora a conjectura foi sempre verdadeira. O caso seguinte:

n	n!	n^2	$n! \leq n^2$
4	24	16	F

Esse caso é suficiente para provar a falsidade

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

Demonstração exaustiva

- Encontrar um contra-exemplo pode não ser simples. Então o caminho para provar uma conjectura é usar métodos para demonstrá-la.
- Quando temos uma conjectura sobre uma coleção finita, ela pode ser provada verificando se ela é válida para cada elemento da coleção.
- Uma **demonstração por exaustão** significa que foram exauridos todos os casos possíveis.
- Ex.02: Provar a conjectura: “Se um inteiro entre 1 e 20 é divisível por 6, então também é divisível por 3.”
  - Como existe um número finito de casos, a conjectura pode ser provada mostrando que é verdadeira para todos os inteiros de 1 a 20, por exemplo, usando uma tabela.

Teoremas e Demonstrações

Técnicas de demonstração

Demonstração exaustiva

- Ex.03: Provar a conjectura: "Para qualquer inteiro **positivo menor ou igual a 5**, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 mais 5 vezes o inteiro."
- Ex.04: Dê um contra-exemplo para a conjectura: "Para qualquer inteiro positivo, o quadrado do inteiro é menor ou igual à soma de 10 mais 5 vezes o inteiro."

Teoremas e Demonstrações

Demonstração Direta

- Uma demonstração ou prova é dita direta quando pressupõe verdadeira a hipótese e, a partir desta, prova ser verdadeira a tese.
- Ex.05: Considere a seguinte conjectura: "A soma de dois números pares é um número par". Podemos efetuar a demonstração direta a partir dos seguintes passos:
  1. Reescrevendo na forma $P \rightarrow Q$: Se n e m são dois números pares quaisquer, então n+m é um número par.
  2. Lembrando que um numero par n pode ser definido por n=2r, onde r é um numero inteiro qualquer.
  3. Se n e m são pares, então existem r, s tais que: n=2r e m=2s, então: n+m=2r+2s => 2(r+s), como r+ s é um número inteiro, logo, n+m é um número par.

Teoremas e Demonstrações

Demonstração Direta

- Ex.06: Considere a seguinte conjectura: “O produto de dois números inteiros pares é um número par”. Faça a demonstração direta (informal) da mesma.

Teoremas e Demonstrações

Contraposição

- Se a demonstração direta $P \rightarrow Q$, não foi atingida, pode-se tentar algumas variantes da técnica de demonstração direta.
- Se puder provar o teorema $Q' \rightarrow P'$, pode-se concluir que $P \rightarrow Q$, usando a tautologia $(Q' \rightarrow P') \rightarrow (P \rightarrow Q)$.
  - $Q' \rightarrow P'$ é a contrapositiva de $P \rightarrow Q$
- A técnica de provar $P \rightarrow Q$ através de uma demonstração direta de $Q' \rightarrow P'$ é chamada de **demonstração por contraposição.**
  - A tautologia $(Q' \rightarrow P') \rightarrow (P \rightarrow Q)$ vem da regra de inferência onde $P \rightarrow Q$ pode ser deduzida de $Q' \rightarrow P'$.

Teoremas e Demonstrações

Contraposição

- Ex. 07: Prove o seguinte teorema ($n \in \mathbb{N}$):

$$n! > (n+1) \rightarrow n>2$$

- Por equivalência, pode-se demonstrar por contraposição, que:

$$n \leq 2 \rightarrow n! \leq (n+1)$$

- Testando a proposição para n=0, 1 e 2.

n	**n!**	**n+1**
0	1	1
1	1	2
2	2	3

Teoremas e Demonstrações

Contraposição

- Ex.08: Mostre que se n + 1 senhas diferentes foram distribuídas para n alunos, então algum aluno recebe $\geq$ 2 senhas.
  - A contrapositiva é "Se todo aluno recebe < 2 senhas, então **não** foram distribuídas n + 1 senhas".

Teoremas e Demonstrações

Demonstração por absurdo

- Quando a demonstração de $P \rightarrow Q$, consiste em supor a hipótese P, supor a negação de Q e concluir uma contradição (em geral $Q \wedge Q'$), a demonstração é chamada de **por absurdo.**
- Lembrando que uma **contradição** é uma fbf cujo valor lógico é sempre **Falso**. Ela pode ser denotada por **0**.
  - Por exemplo, a fbf $A \wedge A'$ tem sempre valor falso.
- Para provar $P \rightarrow Q$, podemos levar em conta a seguinte fbf: $(P \wedge Q' \rightarrow 0) \rightarrow (P \rightarrow Q)$.
  - Construindo a tabela verdade, concluímos a que a fbf é uma tautologia.
- Então se provarmos que $P \wedge Q' \rightarrow 0$, isto implicará em $P \rightarrow Q$

Teoremas e Demonstrações

Demonstração por absurdo

- Portanto, na demonstração por absurdo, assume-se o oposto do que se quer provar, ao chegar a uma contradição, a prova é finalizada.
- Ex.10: Demonstrar por absurdo a proposição: “Se um número somado a ele mesmo é igual a ele mesmo, então esse número é 0”.
  - Representando x por um numero qualquer.
  - A hipótese é $x+x=x$ e a conclusão é $x=0$.
  - Para demonstrar por absurdo, supomos que $x+x=x$ e $x\neq 0$. Então $2x=x$ e $x\neq 0$.
  - Dividindo ambos os lados da eq. $2x=x$ por x, obtém-se $2=1$, uma contradição, que buscamos.
  - Portanto, $(x+x=x) \rightarrow (x=0)$

Teoremas e Demonstrações

Demonstração por absurdo

- Ex.11: Demonstrar por absurdo que o produto de inteiros ímpares não é par.

Resumo das técnicas de demonstração

Técnica	Abordagem para provar $P \to Q$	Observações
Exaustão	Demonstre $P \to Q$ para todos os casos possíveis	Pode ser usada para provar um número finito de casos.
Direta	Suponha P, deduza Q	Abordagem padrão – o que se deve tentar em geral.
Contraposição	Suponha Q′, deduza P′	Use a técnica se Q′ parece dar mais munição que P.
Por Absurdo	Suponha $P \wedge Q'$, deduza uma contradição	Use essa técnica quando Q disser que alguma coisa não é verdade.