Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 03

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Introdução à Lógica Formal

Quantificadores, predicados e validade

- Fbfs proposicionais tem uma possibilidade limitada de expressão.
  - A expressão “Para todo x, x>0” pode ser considerada uma proposição verdadeira sobre os inteiros positivos.
  - Porém ela não pode ser simbolizada adequadamente usando apenas letras, parênteses e conectivos lógicos.
- Para expressões desse tipo, é necessário o uso de **quantificadores** e **predicados.**
  - **Quantificadores** são representações de expressões do tipo “para todo”, “para cada”, isto é frases que dizem quantos objetos tem determinada propriedade.
  - O **quantificador universal** (*para todo, para cada etc*.) é representado por $\forall$.
  - A sentença acima ficaria $(\forall x)(x>0)$.
  - O quantificador age sobre a expressão dentro do segundo parênteses.

Introdução à Lógica Formal

Quantificadores, predicados e validade

- A frase “x>0” descreve uma propriedade da variável x de ser positiva.
  - Uma propriedade é chamada de **predicado**.
  - A notação P(x) é usada para representar alguma propriedade ou predicado, não explicitada, que a variável x possa ter.
  - A expressão anterior assume a seguinte forma geral:

$$(\forall x)P(x)$$

- O valor lógico da expressão depende do domínio dos objetos que estamos referenciando.
  - Se o domínio for o conjunto dos inteiros positivos, a expressão tem valor lógico verdadeiro.
  - Caso contrário, por exemplo, todos os inteiros, a expressão teria valor falso.

Introdução à Lógica Formal

Quantificadores, predicados e validade

- O quantificador existencial é simbolizado por $\exists$ e se lê "existe", "há pelo menos um".
  - Assim, a expressão

$$(\exists x)(x > 0)$$

  - Pode ser lida "existe um x tal que x é maior que zero".
  - Generalizando a expressão anterior:

$$(\exists x)P(x)$$

- O valor lógico da expressão depende do domínio dos objetos que estamos referenciando.
  - Se o domínio contiver um número inteiro positivo, a expressão tem valor lógico verdadeiro.
  - Caso contrário, a expressão terá valor falso.

Introdução à Lógica Formal

Quantificadores, predicados e validade

- Os predicados vistos até agora, que envolvem apenas uma variável, são chamados de **unários**.
  - Os predicados também podem ser **binários, ternários e n-ários.**
- A expressão $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$, lida como "para todo x existe um y tal que Q(x,y)", contém dois quantificadores para as duas variáveis da propriedade binária.
  - A ordem dos quantificadores é importante.
- Podemos ter constantes nas expressões (qualquer que seja o número de variáveis), como objeto específico do domínio. Ex. $(\forall x)Q(x,a)$.

Quantificadores, predicados e validade

Observações:

- A ordem dos quantificadores é importante:
  - $(\forall x)(\forall y)$ é o mesmo que $(\forall y)(\forall x)$
  - $(\exists x)(\exists y)$ é o mesmo que $(\exists y)(\exists x)$
  - $(\exists x)(\forall y)$ **NÃO** é o mesmo que $(\forall y)(\exists x)$
    - $(\exists x)(\forall y)$ ama (x, y)
    - Existe alguém que ama todo mundo
    - $(\forall y)(\exists x)$ ama (x, y)
    - Todo mundo é amado por pelo menos uma pessoa.

- Seja Q(x,y) a propriedade $x<y$, para todos os inteiros:
  - $(\forall x)(\exists y)Q(x,y)$ - Para todo inteiro x, existe um y maior que ele.
  - $(\exists y)(\forall x)Q(x,y)$ – Existe um inteiro y que é maior que todo x.

Introdução à Lógica Formal

Interpretação

- Uma **interpretação** para uma expressão envolvendo predicados consiste em:
  - Uma coleção de objetos, chamada de conjunto universo ou domínio da interpretação, incluindo pelo menos 01 objeto.
  - A especificação de uma propriedade dos objetos do domínio para cada predicado da expressão.
  - A atribuição de um objeto particular no conjunto universo para cada símbolo constante na expressão.
- Ex.01 – Dê uma interpretação (isto é, o conjunto universo e o significado de $P(x)$) para qual $(\forall x)P(x)$ tem o valor verdadeiro.
- Ex.02 – Dê uma interpretação para qual $(\forall x)P(x)$ tem o valor falso.
- Ex.03 – É possível encontrar uma interpretação na qual, ao mesmo tempo, $(\forall x)P(x)$ seja V e $(\exists x)P(x)$ seja F?

Introdução à Lógica Formal

- Assim com temos as fbfs proposicionais, que agrupam colchetes, parênteses, letras e conectivos, temos as fórmulas que agrupam predicados e quantificadores.
  - Essas fórmulas são chamadas de fbfs predicadas.
  - Seguem regras de sintaxe para ser considerada fbfs.
  1. $P(x) \vee Q(y)$
  2. $(\forall x)[P(x) \rightarrow Q(x)]$
  3. $(\forall x)((\exists y)[P(x,y) \wedge Q(x,y)] \rightarrow R(x))$
  4. $(\exists x)S(x) \vee (\forall x)T(y)$
  - Os símbolos entre colchetes e parênteses identificam o escopo de um quantificador, isto é, a parte da fbf onde o quantificador se aplica.
    - Em 1, não existe escopo. Em 2, o escopo de $(\forall x)$ é $[P(x) \rightarrow Q(x)]$.
    - Em 3, o escopo de $(\exists y)$ é $P(x,y) \wedge Q(x,y)$ e o de $(\forall x)$ é a expressão inteira que o segue.

Introdução à Lógica Formal

Tradução

- Muitas declarações em português podem ser expressas como fbfs predicadas.
  - “Todo papagaio é feio”, significa que “dada uma coisa, se é um papagaio, então é feio”.
  - Usando P(x) para a frase “x é um papagaio” e por F(x) “é feio”, a proposição pode ser simbolizada como

$$(\forall x)[P(x) \rightarrow F(x)]$$

- O quantificador $\forall$ e o conectivo $\rightarrow$ estão quase sempre juntos.
  - Analogamente, “Existe um papagaio feio” significa que “Existe alguma coisa que é, ao mesmo tempo, papagaio e feio”, que pode ser representado por:

$$(\exists x)[P(x) \wedge F(x)]$$

- O quantificador $\exists$ e o conectivo $\wedge$ estão quase sempre juntos.

Introdução à Lógica Formal

Tradução

- Para traduzir uma declaração em português para uma fbf, pode ser útil escrever primeiro alguma **proposição intermediária** em português e depois simbolizar essa proposição.
- Advérbios “só”, “somente”, “apenas” podem confundir a tradução, pois sua colocação na sentença pode alterar completamente o significado.
  - João ama apenas Maria.
  - Apenas João ama Maria.
  - João apenas ama Maria.

Introdução à Lógica Formal

Tradução

- Ex.: Usando os símbolos predicados abaixo, escreva as fbfs que representam as proposições logo a seguir (o domínio consiste em todas as pessoas):
  - E(x) é "x é um estudante"
  - I(x) é "x é inteligente"
  - M(x) é "x gosta de música"
- Proposições:
  a. Todos os estudantes são inteligentes.
  b. Alguns estudantes inteligentes gostam de música.
  c. Todo mundo que gosta de música é um estudante não inteligente.
  d. Apenas estudantes inteligentes gostam de música.

Tradução

- Ex.: Usando os símbolos predicados indicados e quantificadores apropriados, escreva cada declaração em português como uma fbf predicada:
  B(x): x é uma bola.
  R(x): x é redondo.
  S(x): x é uma bola de futebol

a) Todas as bolas são redondas.
b) Nem todas as bolas são bolas de futebol.
c) Todas as bolas de futebol são redondas.
d) Algumas bolas não são redondas.
e) Toda bola redonda é uma bola de futebol.

Introdução à Lógica Formal

Validade

- O valor lógico de uma fbf proposicional depende dos valores lógicos atribuídos às letras de proposição.
- O valor lógico de uma fbf predicada depende da interpretação.
- Escolher uma interpretação para uma fbf predicada é análogo a escolher valores lógicos para uma fbf proposicional.
  - Entretanto, existe uma infinidade de interpretações possíveis de uma fbf predicada e apenas 2^n linhas possíveis em uma tabela verdade.
- Uma tautologia é uma fbf proposicional que assume o valor verdadeiro em todas as linhas da tabela verdade.
- O análogo de uma tautologia para uma fbf é a **validade**.

Introdução à Lógica Formal

Validade

- Uma fbf predicada é válida se ela é verdadeira para todas as interpretações possíveis
  - A validade deve ser deduzida de sua forma, já que a validade é independente de qualquer interpretação particular.
  - Uma fbf válida é intrinsecamente verdadeira.
- Como definir a validade de uma fbf predicada?
  - Não existe algoritmo para definir a validade.
  - Necessidade de determinar se a forma de uma fbf torna-a verdadeira em todas as interpretações.
  - Não pode haver valor falso ou alguma proposição sem valor lógico.

Introdução à Lógica Formal

Comparação entre Fbfs Proposicionais e Predicadas

	Fbfs proposicionais	Fbfs Predicadas
Valores Lógicos	V ou F, dependendo dos valores lógicos atribuídos às letras de proposição.	Verdadeiro, falso ou talvez (se a fbf tiver uma variável livre) sem valor lógico, dependendo da interpretação.
"Intrinsecamente verdadeiro"	Tautologia – Verdade para todas as atribuições de valores lógicos.	Fbf Válida – Verdade para todas as interpretações.
Metodologia	Tabela Verdade (algoritmo) para determinar de uma fbf é uma tautologia.	Não existe algoritmo para determinar se uma fbf é válida.

Validade

- Ex: Determine o valor lógico de cada uma das Fbfs a seguir, com a interpretação de que o conjunto universo consiste em todos os inteiros, **I(x) significa "*x é ímpar*", L(x) que "*x<0*" e G(x) que "*x >9*".**
  1. $(\exists x)(I(x))$
  2. $(\forall x)[L(x) \rightarrow I(x)]$
  3. $(\exists x)[L(x) \wedge G(x)]$
  4. $(\forall x)[L(x) \vee G(x)]$

Introdução à Lógica Formal

Validade

- Ex: Verificar a validade das fbfs abaixo:
  1. $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$
  2. $(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$
  3. $(\forall x)\ [P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \wedge (\forall x)\ Q(x)$
  4. $(\exists x)\ P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$
  5. $(\forall x)\ [P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \vee (\forall x)\ Q(x)$

- Mais lógica??? Próximos semestres...