Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia da Computação

Matemática Discreta - 02

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Lógica Proposicional

- Você foi convocado a participar de um júri em um processo criminal. Jason está sendo acusado de um crime.
- O advogado de defesa faz o seguinte argumento:

Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro então Jason não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente.

- O argumento do advogado está correto? – Verifique a validade do argumento.
- Como você votaria?

Lógica Proposicional

Argumento

- O objetivo de um argumento é justificar uma afirmação que se faz, ou dar as razões para uma certa conclusão obtida.

  Exemplo:

  Você me enganou. Pois, disse que ia estudar e meu irmão lhe viu jogando bola.

- Um argumento demonstra/prova como a partir dos dados de um problema chegou-se a uma conclusão.

Lógica Proposicional

Argumento - Raciocínio e Inferência

- Para convencer que você sabe a resposta (que não é um chute!) você tem de expor as razões que o levaram a conclusão (justificar).

Pontos de Partida

↓

Caminhos Seguidos

↓

Conclusão

Raciocínio ou

Processo de Inferência

- Um argumento poderia ser considerado uma reconstrução explícita do raciocínio efetuado

Lógica Proposicional

Argumento - Raciocínio e Inferência

- Inferência é a relação que permite passar das premissas para a conclusão (um “ encadeamento lógico”)
- A palavra inferência vem do latim, *Inferre*, e significa “conduzir para”.
- O objeto de estudo da lógica é determinar se a conclusão de um argumento é ou não decorrente das premissas (uma inferência).

Lógica Proposicional

Validade de um Argumento

- Em um argumento válido, as premissas são consideradas provas evidentes da verdade da conclusão, caso contrário não é válido.

- Quando é válido, podemos dizer que a conclusão é uma consequência lógica das premissas, ou ainda que a conclusão é uma inferência decorrente das premissas.

Lógica Proposicional

- As formas simbólicas como fbfs em lógica formal para representar proposições são chamadas **fbfs proposicionais**.
- Usando ferramentas da lógica formal, podemos chegar a conclusões de proposições dadas.
- O sistema formal que usa fbfs proposicionais é chamado de **lógica proposicional**, **lógica declarativa** ou **cálculo proposicional.**
- **Argumentos Válidos:** um argumento pode ser representado em forma simbólica como:

$$\mathbf{P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q}$$

  - **P_1, ...P_n** são as proposições dadas, chamadas de **hipóteses** do argumento e **Q** é a **conclusão** do argumento.
  - P e Q representam fbfs e não somente letras de proposição.
  - Quando um argumento pode ser considerado válido?

Lógica Proposicional

- Q é uma conclusão lógica de P_1, ...P_n sempre que a verdade das proposições P_1, ...P_n implica na verdade de Q.
- Uma fbf proposicional $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é um argumento válido quando for uma tautologia.
- Para testarmos se $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n \rightarrow Q$ é uma tautologia, podemos construir uma tabela verdade, ou mais simplificadamente, utilizaremos um sistema de **regras de dedução**.
  - Essas regras modificam uma fbf sem modificar seu valor lógico.
  - Começando a partir das hipóteses P_1, ...P_n (supostas verdadeiras) para se chegar à conclusão Q verdadeira.

Lógica Proposicional

- Uma **sequência de demonstração** é uma sequência de fbfs nas quais cada fbf é uma hipótese ou resultado de se aplicar uma das regras de dedução às fbfs anteriores na sequência.
- Usando lógica formal para provar que Q é uma conclusão válida de P_1, ...P_n, vamos produzir uma sequência de demonstração da forma:

P_1 (hipótese)

$P_{2\ldots}$ (hipótese)

P_n (hipótese)

fbf_1 (obtida aplicando-se uma regra de dedução às anteriores)

fbf_2...

Q (obtida aplicando-se uma regra de dedução às anteriores)

Lógica Proposicional

Regras de Dedução para a Lógica Proposicional

- Dois tipos: **equivalências e inferência.**
- As regras de equivalência permitem que fbfs individuais sejam reescritas mantendo o mesmo valor lógico.
- As regras de inferência permitem a dedução de novas fbfs a partir de fbfs anteriores na sequência de demonstração.
- As regras de equivalência dizem que determinados pares de fbfs são equivalentes ($R \Leftrightarrow S$, onde $R \leftrightarrow S$ é uma tautologia).
  - R pode ser substituído por S sem mudança do valor lógico. As regras preservam os valores

Lógica Proposicional

Regras de Equivalência

Expressão	Equivalente a	Nome/Abreviação
$P \vee Q$ $P \wedge Q$	$Q \vee P$ $Q \wedge P$	Comutatividade / Com
$(P \vee Q) \vee R$ $(P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R)$ $P \wedge (Q \wedge R)$	Associatividade / Ass
$P \vee (Q \wedge R)$ $P \wedge (Q \vee R)$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	Distributividade / Dist
$(P \vee Q)'$ $(P \wedge Q)'$	$P' \wedge Q'$ $P' \vee Q'$	Leis de De Morgan / DM
$P \rightarrow Q$	$P' \vee Q$	Condicional / Cond (*)
P	$(P')'$	Dupla negação / Dn
$P \leftrightarrow Q$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	Equivalência / Equi

(*) Demonstrar.

Lógica Proposicional

Regras de Equivalência

- Ex.: Suponha que uma hipótese de um argumento proposicional pode ser simbolizada como

$$(A' \vee B') \vee C$$

- Então, o primeiro passo de uma sequência de demonstração para o argumento poderia ser:
    1. $(A' \vee B') \vee C$ (Hip)
    2. $(A \wedge B)' \vee C$ (De Morgan)
    3. $(A \wedge B) \rightarrow C$ (Cond)

Lógica Proposicional

Regras de Inferência

- Se uma ou mais fbfs fazem parte de uma sequência de demonstração, então podemos adicionar uma nova fbf na sequência, substituindo uma anterior por uma nova fbf correspondente.
- Ao contrário das regras de equivalência, as regras de inferência não funcionam em ambas as direções.
- A ideia básica de se utilizar inferência é da dedução de novas proposições a partir de proposições já conhecidas.

Lógica Proposicional

Regras de Inferência

De	Podemos Deduzir	Nome/Abreviação
P, P → Q	**Q**	Modus ponens / mp
P → Q, Q′	**P′**	Modus Tollens / mt
P, Q	**P ∧ Q**	Conjunção / conj
P ∧ Q	**P, Q**	Simplificação / simp
P	**P ∨ Q**	Adição / ad

Ex.:

P	**P → Q**	**Q**
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	V	?

- Se P, então Q.
- P.
- Portanto Q.

1. **Se chover, então fico em casa.**
2. **Choveu.**
3. **Portanto fico em casa.**

Lógica Proposicional

Regras de Inferência

Ex.:

$P \rightarrow Q$	Q'	P'
V	F	F

- Se P, então Q.
- Q é falso.
- então P é falso

1. **Se existe fogo aqui, então tem oxigênio**
2. **Não há oxigênio aqui**
3. **Então aqui não há fogo**

Lógica Proposicional

Regras de Inferência

Ex.:

1. $A \to (B \wedge C)$ - hip
2. A - hip
3. $B \wedge C$ – 1,2 mp

Ex.:

1. $(A \wedge B') \to C$ - hip
2. C' - hip
3. $(A \wedge B')'$ – 1,2 mt

Ex.:

1. $(A \to B) \vee C$ - hip
2. A - hip
3. ? (mp não se aplica)

- Para usar uma regra de dedução, as fbfs tem que ter a mesma forma descrita na regra.

Lógica Proposicional

- Usando a lógica proposicional, provar que o argumento abaixo é válido.

$$A \wedge (B \to C) \wedge [(A \wedge B) \to (D \vee C')] \wedge B \to D$$

1.	A	hip
2.	$B \to C$	hip
3.	$(A \wedge B) \to (D \vee C')$	hip
4.	B	hip
5.	C	2,4, mp
6.	$A \wedge B$	1,4, conj
7.	$D \vee C'$	3,6, mp
8.	$C' \vee D$	7, com
9.	$C \to D$	8, cond
10.	$\mathbf{D}$	**5, 9, mp**

Lógica Proposicional

- Usando a lógica proposicional, provar que o argumento abaixo é válido.

$$[(A \vee B') \rightarrow C)] \wedge (C \rightarrow D) \wedge A \rightarrow D$$

1.	$(A \vee B') \rightarrow C$	hip
2.	$C \rightarrow D$	hip
3.	A	hip
4.	$A \vee B'$	3, ad
5.	C	1,4, mp
6.	D	2,5, mp

Exercícios

- Usando a lógica proposicional, provar que os argumentos abaixo são válidos.

a) $(A' \rightarrow B) \wedge A' \wedge (B' \vee C) \rightarrow C$

b) $(A \wedge C' \rightarrow B') \wedge A \wedge C' \rightarrow B'$

c) $(A' \rightarrow B') \wedge B \wedge (A \rightarrow C) \rightarrow C$

Regra de equivalência - Contraposição

$$\mathbf{(A' \rightarrow B') \leftrightarrow (B \rightarrow A)}$$

Lógica Proposicional

Sugestões de Dedução

- *Modus ponens* é a regra mais intuitiva e deve ser usada muitas vezes.
- Fbfs da forma $(P \wedge Q)'$ e $(P \vee Q)'$ dificilmente são úteis em uma sequência de demonstração. Usar as leis de De Morgan para convertê-las em $P' \vee Q'$ e $P' \wedge Q'$ respectivamente.
- Fbfs na forma $P \vee Q$ também não são úteis em sequências de demonstração. Usar a dupla negação para converter $P \vee Q$ em $(P')' \vee Q$ e depois usar a condicional para obter $P' \to Q$.

Lógica Proposicional

Métodos Dedutivos e Outras Regras

- Suponha que o argumento que queremos provar tem a forma:

$$P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge ... \wedge Pn \rightarrow (R \rightarrow S)$$

- A conclusão é uma implicação. Mas, ao invés de usar $P_1, ...P_n$ como hipóteses e inferir $R \rightarrow S$, o método dedutivo nos permite adicionar R como hipótese adicional e depois inferir S, na seguinte forma:

$$P1 \wedge P2 \wedge P3 \wedge ... \wedge Pn \wedge R \rightarrow S$$

- A vantagem é que nos dá mais uma hipótese para demonstração.

Lógica Proposicional

- Use a lógica proposicional, usando o método dedutivo, para provar que o argumento abaixo é válido.

$$[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$[A \rightarrow (A \rightarrow B)] \wedge A \rightarrow B$

1. $A \rightarrow (A \rightarrow B)$ hip
2. A hip
3. $A \rightarrow B$ 1,2, mp
4. B 2,3, mp

Lógica Proposicional

- Use a lógica proposicional, usando o método dedutivo, para provar que o argumento abaixo é válido.

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \wedge A \rightarrow C$

1. $A \rightarrow B$ hip
2. $B \rightarrow C$ hip
3. A hip
4. B 1,3, mp
5. C 2,4, mp

- A demonstração acima descreve a regra para o **Silogismo Hipotético.**

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$$

Lógica Proposicional

Silogismo Hipotético

- De $P \rightarrow Q$ e $Q \rightarrow R$ pode-se deduzir $P \rightarrow R$.
- De maneira formal:

$$(\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}) \wedge (\mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R})$$

- Por ser uma outra regra de dedução legítima, o silogismo hipotético pode ser usado em um passo de uma demonstração.
- Ex.: Demonstrar a validade do argumento abaixo.

$(A' \vee B) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1. $A' \vee B$ — hip
2. $B \rightarrow C$ — hip
3. $A \rightarrow B$ — 1, cond
4. $A \rightarrow C$ — 2,3, sh

Lógica Proposicional

Silogismo Disjuntivo

- De $P \vee Q$ e P', pode-se deduzir Q.
- De maneira formal:

$$\mathbf{(P \vee Q) \wedge P' \rightarrow Q}$$

- É outra regra de dedução adicional, chamada de **silogismo disjuntivo**, que pode ser usada em um passo de uma demonstração.
- Ex.: Demonstrar a validade do argumento abaixo.

$(A \vee B) \wedge A' \rightarrow B$

1.	$A \vee B$	hip
2.	A'	hip
3.	$A' \rightarrow B$	1, cond
4.	B	2,3, mp

Lógica Proposicional

Argumentos Verbais

- Um argumento verbal formado por declarações simples, pode ser testado logicamente por um processo de duas etapas:
  1. Simbolize cada declaração usando fbfs proposicionais.
  2. Prove a validade do argumento construindo uma sequência de demonstração através das regras de dedução.
- Considere o argumento: *"Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. Ou a taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair."*
  - Definir a notação do argumento em lógica proposicional e provar a validade do argumento, por sequência de demonstração.

Lógica Proposicional

"Se as taxas de juros caírem, o mercado imobiliário vai melhorar. Ou a taxa federal de descontos vai cair, ou o mercado imobiliário não vai melhorar. As taxas de juros vão cair. Portanto, a taxa federal de descontos vai cair."

Usando a notação:

J A taxa de juros vai cair.

I O mercado imobiliário vai melhorar.

F A taxa federal de descontos vai cair.

O argumento fica:

$(J \to I) \wedge (F \vee I') \wedge J \to F$

1. $J \to I$	hip
2. $(F \vee I')$	hip
3. J	hip
4. $I' \vee F$	2, com
5. $I \to F$	4, cond
6. $J \to F$	1,5, sh
7. F	3,6 mp

Lógica Proposicional

Nos exercícios abaixo que regra de inferência é ilustrada pelo argumento dado.

1) Se Martins é o autor, então o livro é de ficção. Mas o livro não é de ficção. Portanto, Martins não é o autor.

2) Se a firma falir, todos os seus bens tem que ser confiscados. A firma faliu. Então todos os bens foram confiscados.

3) Se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom corredor. Se Paulo é um bom corredor, então ele é um bom ciclista. Portanto, se Paulo é um bom nadador, então ele é um bom ciclista.

Lógica Proposicional

Nos exercícios abaixo que regra de inferência é ilustrada pelo argumento dado.

4) A condição suficiente para que a caixa d'água encha é que a válvula esteja aberta. Sabe-se que a válvula está aberta. Portanto a caixa d'água vai encher.

5) A moqueca não pode ser feita nem de Baiacu e nem de Cação. Isto é equivalente a dizer que é falso afirmar que: a moqueca é feita de Baiacu ou de Cação.

6) Se o show deu muita gente então é porque fez sol. Mas, sabe-se que não fez sol. Portanto o show não deu muita gente.

Lógica Proposicional

Ex.: Verifique a validade do argumento: *"Meu cliente é canhoto mas, se o diário não tiver sumido, então meu cliente não é canhoto; portanto, o diário sumiu."*

Usando a notação:

C Meu cliente é canhoto

D O diário sumiu.

O argumento fica: $C \wedge (D' \to C') \to D$

1. C hip
2. $(D' \to C')$ hip
3. $(D')' \vee C'$ 2, cond
4. $D \vee C'$ 3, dn
5. $C' \vee D$ 4, com
6. $C \to D$ 5, cond
7. D 1,6 mp

Obs: A validade do argumento é uma função apenas do seu formato lógico e não tem nada a ver com a verdade fatual de nenhum dos seus componentes.

Lógica Proposicional

Ex.: Verifique a validade do argumento: *"Se a segurança é um problema, então o controle será aumentado. Se a segurança não é um problema, então os negócios na internet irão aumentar. Portanto, se o controle não for aumentado, os negócios na internet crescerão."*

Usando as letras de proposição S, C, N:

Lógica Proposicional

- Você foi convocado a participar de um júri em um processo criminal. Jason está sendo acusado de um crime.
- O advogado de defesa faz o seguinte argumento:

Se meu cliente fosse culpado, a faca estaria na gaveta. Ou a faca não estava na gaveta ou Jason viu a faca. Se a faca não estava lá no dia 10 de outubro então Jason não viu a faca. Além disso, se a faca estava lá no dia 10 de outubro, então a faca estava na gaveta e o martelo estava no celeiro. Mas todos sabemos que o martelo não estava no celeiro. Portanto, senhoras e senhores, meu cliente é inocente.

- O argumento do advogado está correto? – Verifique a validade do argumento.
- Como você votaria?