Universidade Federal do Vale do São Francisco
Curso de Engenharia de Computação

Matemática Discreta - 01

Prof. Jorge Cavalcanti
jorge.cavalcanti@univasf.edu.br
www.univasf.edu.br/~jorge.cavalcanti
www.twitter.com/jorgecav

Matemática Discreta

- **Apresentação da Disciplina**
- Dicas de (boa) convivência acadêmica
- Conteúdo da Disciplina:
  1. Introdução/Conceitos Básicos
  2. Noções de Lógica
  3. Demonstrações e teoremas.
  4. Indução e Recursão
  5. Teoria de conjuntos e cardinalidade de conjuntos
  6. Conjuntos enumeráveis
  7. Relações
  8. Funções parciais e totais
  9. Funções de Hash
  10. Teoria dos Grafos e Árvores

Matemática Discreta

- Avaliação: 3 + Final.
- Material disponibilizado na página

  www.univasf.edu.br/~jorge.Cavalcanti
  (Classroom)
- Bibliografia:
  - Básica
    - Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação. Gersting, J. L., 5 Ed.,LTC.
  - Complementar
    - Matemática Discreta Uma Introdução. Scheineman. E. R., Ed. Pioneira Thomson.
    - Matemática Discreta. Menezes, P.B., 2 Ed. Sagra Luzzato.

Introdução

- Por que “Matemática Discreta?”
  - Discreto x contínuo (intervalo, números reais)
  - Recursos computacionais finitos (conjuntos contáveis)
- Objetivos:
  - Desenvolver a capacidade de raciocínio lógico-matemático;
  - Obter uma visão abrangente de uma parte significativa da introdução à computação;
  - Aplicar os conceitos da disciplina como uma ferramenta matemática para investigações e aplicações precisas em computação;
  - Abordar problemas aplicados e enfrentar ou propor com naturalidade novas tecnologias.

Introdução

- Tratamento de Problemas:

Lógica

Teoremas
+
Demonstrações

→

Computação

Algoritmos
+
Implementações

Introdução à Lógica Formal

Conceitos Iniciais:

- A Lógica tem, por objeto de estudo, as leis gerais do pensamento, e as formas de aplicar essas leis corretamente na investigação da verdade.
- **Aristóteles** - filósofo grego - 342 a.C, sistematizou os conhecimentos existentes em Lógica, elevando-os à categoria de ciência.
- Em sua obra chamada *Organum* ("ferramenta para o correto pensar"), estabeleceu princípios tão gerais e tão sólidos que até hoje são considerados válidos.
- Para descrever o mundo, usamos sentenças declarativas tais como:
  i. Toda mãe ama seus filhos
  ii. Maria é mãe e Paulo é Filho de Maria
- Aplicando algumas regras gerais de raciocínio, podemos concluir a partir dessas afirmações:
  iii. Maria ama Paulo

Introdução à Lógica Formal

Conceitos Iniciais:

- **Proposição:** É uma construção (frase, sentença, pensamento) à qual se pode atribuir juízo.
  - O juízo atribuído é que a sentença pode ser falsa ou verdadeira.
- Ex.: Verificar se são proposições:
  1. Dez é menor que sete.
  2. *Como está você?*
  3. 3 + 4 > 5
  4. Existe vida em outras galáxias.
  5. *Parabéns!*
- Proposições compostas: Duas ou mais proposições podem ser agrupadas usando os **conectivos lógicos**.
  - Linux é um sistema operacional **e** Java é uma linguagem de programação.
  - Vou comprar uma camisa azul **ou** branca.
  - **Se** chover hoje, **então** não terá o show.

Introdução à Lógica Formal

- O conectivo lógico ***e*** é representado pelo símbolo $\wedge$. A expressão A $\wedge$ B é chamada de **conjunção** de A e B**.**
- As proposições são representadas por letras maiúsculas.
- Se A e B são proposições verdadeiras, então A $\wedge$ B deve ser considerada verdadeira.
- Podemos então apresentar a tabela com os valores lógicos de A $\wedge$ B para todos os valores lógicos possíveis dos elementos A e B.
  - Cada linha da tabela representa um possível valor lógico associado a cada uma das letras de proposição e apresenta o valor lógico resultante da expressão composta.
  - Essa tabela é chamada de tabela verdade.

A	**B**	**A $\wedge$ B**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Introdução à Lógica Formal

- Um outro conectivo lógico é a palavra ***ou***, simbolizado por $\vee$, que representa a **disjunção.**
- A tabela abaixo apresenta os valores lógicos de $A \vee B$ para todos os valores lógicos possíveis dos elementos A e B.

A	**B**	**$A \vee B$**
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- $\wedge$ e $\vee$ são **conectivos lógicos binários**, pois juntam duas expressões.

Introdução à Lógica Formal

- A **negação** de uma proposição é construída colocando a palavra *não* de forma apropriada ou prefixando-se a proposição "*não é fato que*".
  - Brasil não é um país livre;
  - Não é fato que o Windows seja um software livre.
- A negação de A é representada por A′ ou **por ¬**A (lida como "não A").

A	**A′**
V	?
F	?

- A negação de uma proposição deve ser feita com cuidado. Por exemplo:

Proposição	Negação incorreta	Negação Correta
Pedro é alto e magro	Pedro é baixo e gordo	Pedro é baixo ou gordo Pedro não é alto ou não é magro

Introdução à Lógica Formal

- Proposições podem ser combinadas na forma "*se proposição A, então proposição B*".
  - O conectivo lógico é o **condicional** (**ou implicação**)
  - A proposição composta é denotada por A $\rightarrow$ B (A **implica** B).
  - A é a proposição antecedente e B é a proposição consequente.
  - A proposição composta A $\rightarrow$ B é falsa quando A é verdadeira e B é falsa. Caso contrário é verdadeira.
  - A tabela verdade do conectivo condicional é a seguinte:

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**	**B $\rightarrow$ A**
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

Introdução à Lógica Formal

- O conectivo **bi-condicional** (ou **equivalência**) é simbolizado por $\leftrightarrow$.
  - A expressão $A \leftrightarrow B$ é uma abreviação de:

$$(A \to B) \wedge (B \to A)$$

  - Conforme a tabela abaixo, $A \leftrightarrow B$ é verdadeira somente quando A e B têm os mesmos valores lógicos.

A	**B**	**$A \to B$**	**$B \to A$**	**$A \leftrightarrow B$**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Introdução à Lógica Formal

- **Resumindo...**
  - Para a compreensão do raciocínio lógico, a tabela abaixo é essencial.

A	**B**	**$A \to B$**	**$B \to A$**	**$A \leftrightarrow B$**	**A′**
V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	

Introdução à Lógica Formal

Fórmulas Lógicas

- Podemos encadear letras de proposição, conectivos e parênteses (colchetes), para forma novas expressões como:

$$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

- Uma cadeia deve formar uma expressão válida (**fbf**).
- Fórmulas atômicas são as que não podem ser decompostas em proposições mais simples $(A \rightarrow B)$.
- Ordem de precedência:
  1. Conectivos dentro dos parênteses, do mais interno para o mais externo.
  2. Negação ‛
  3. Conjunção $\wedge$ e Disjunção $\vee$
  4. Condição $\rightarrow$
  5. Bicondição $\leftrightarrow$
- Ex.: $A \vee B' = A \vee (B')$ e não $(A \vee B')$
- $A \wedge B \rightarrow C = (A \wedge B) \rightarrow C$ e não $A \wedge (B \rightarrow C)$

Introdução à Lógica Formal

Fórmulas Lógicas

- Letras maiúsculas perto do final do alfabeto (P, Q, R, S) são usadas para representar fbfs, para abstrairmos detalhes da fórmula em dado momento:

$$((A \vee B) \wedge C) \rightarrow (B \vee C')$$

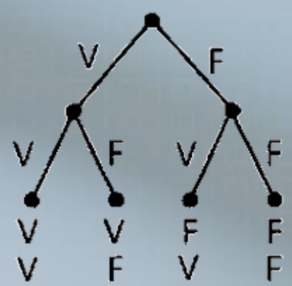
Podemos representar simplesmente por

$$P \rightarrow Q$$

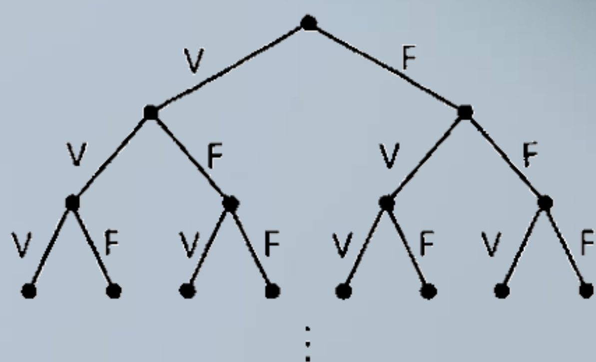
- No caso acima, o conectivo principal é o $\rightarrow$. Na construção das tabelas verdade, esse conectivo aparece na última coluna da tabela.
- Para se escrever tabelas verdades para qualquer fbf, a partir dos seus componentes, deve-se explicitar todos os valores lógicos possíveis das fórmulas.
- Para cada tabela, são necessárias 2^n linhas, onde n é o numero de fórmulas atômicas.

Tabelas Verdade

- O número de linhas é igual ao número de combinações V/F possíveis entre as letras da proposição.



Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós



Letras de afirmações	Possibilidades
1	$2 = 2^1$ nós
2	$4 = 2^2$ nós
3	$8 = 2^3$ nós
n	(2^n nós)

Introdução à Lógica Formal

Tabelas Verdade

- Ex 01. Construir a tabela-verdade para a fórmula:

$$A \vee B' \rightarrow (A \vee B)'$$

  - Conectivo principal : $\rightarrow$
  - Número de linhas: $2^2 = 4$
  - Fazendo **P** = $A \vee B'$ e **Q** =$(A \vee B)'$

A	**B**	**B′**	**A ∨ B′**	**A ∨ B**	**(A ∨ B)′**	**P → Q**
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Introdução à Lógica Formal

Tabelas Verdade

- Ex 02. Construir a tabela-verdade para a fórmula:

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \rightarrow A)$$

  - Conectivo principal : $\leftrightarrow$
  - Número de linhas: $2^2 = 4$
  - Fazendo **P** = $(A \rightarrow B)$ e **Q** =$(B \rightarrow A)$

A	**B**	**$A \rightarrow B$**	**$B \rightarrow A$**	**$P \leftrightarrow Q$**
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Introdução à Lógica Formal

Tabelas Verdade

- Ex 03. Construir a tabela-verdade para a fórmula:

$$(A \vee A') \rightarrow (B \wedge B')$$

  - Conectivo principal :
  - Número de linhas:
  - Fazendo **P** = e **Q** =

A	B					
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Introdução à Lógica Formal

Tabelas Verdade

- Ex 04. Construir a tabela-verdade para a fórmula:

$$(A \to B) \leftrightarrow (B' \to A')$$

  - Conectivo principal :
  - Número de linhas:
  - Fazendo **P** = e **Q** =

A	**B**					
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Introdução à Lógica Formal

Tautologia e Contradição

- Uma fbf que assume sempre o valor V (Ex.:04) é denominada de **tautologia.**
  - O exemplo mais simples de uma tautologia é $A \vee A'$
  - Podemos representar pelo valor 1
- Uma fbf cujo valor lógico é sempre falso (Ex.: 03) é uma **contradição**.
  - O exemplo mais simples de uma contradição é $A \wedge A'$
  - Podemos representar pelo valor 0
- Se $P \leftrightarrow Q$ for uma tautologia, P e Q são ditas equivalentes, denotando essa propriedade por: $P \Leftrightarrow Q$.

Introdução à Lógica Formal

Equivalências Tautológicas

1a. $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$	**1b.** $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	(propriedades comutativas)
2a. $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$	**2b.** $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$	(propriedades associativas)
3a. $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	**3b.** $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	(propriedades distributivas)
4a. $A \vee 0 \Leftrightarrow A$	**4b.** $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$	(propriedades de identidade)
5a. $A \vee A' \Leftrightarrow 1$	**5b.** $A \wedge A' \Leftrightarrow 0$	(propriedades complementativas)

- Note que em 2a e 2b podemos escrever a fórmula sem a necessidade de parênteses.

Introdução à Lógica Formal

Leis de De Morgan

- Duas equivalências adicionais muito úteis foram enunciadas pelo matemático inglês Augusto de Morgan (Séc XIX).

$$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$$

$$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$$

- Importante!! Resolver exercícios livro-texto.

Introdução à Lógica Formal

Composição de Proposições

- É possível construir proposições a partir de proposições já existentes. Este processo é conhecido por Composição de Proposições.
- Suponha que tenhamos duas proposições:

A = "Maria tem 23 anos"

B = "Maria é alta"

Introdução à Lógica Formal

Composição de Proposições

"Maria não tem 23 anos"	**A′**
"Maria não é alta“	**B′**
"Maria tem 23 anos" e **"Maria é alta"**	**A ∧ B**
"Maria tem 23 anos" ou **"Maria é alta"**	
"Maria não tem 23 anos" e **"Maria é alta"**	
"Maria não tem 23 anos" ou **"Maria é alta"**	
"Maria tem 23 anos" ou **"Maria não é alta"**	
"Maria tem 23 anos" e **"Maria não é alta"**	
Se **"Maria tem 23 anos"** então **"Maria é alta"**	
Se **"Maria não tem 23 anos"** então **"Maria é alta"**	
"Maria não tem 23 anos" e "Maria é alta"	
"Maria tem 1,50m " é equivalente a "Maria não é alta“	

Introdução à Lógica Formal

Conectivos Lógicos no Mundo Real

- O uso de conectivos é a base para construção de circuitos lógicos digitais.
- O uso adequado de conectivos pode facilitar buscas em mecanismos de busca na rede, assim como restringir os inúmeros resultados.
  - Ex: carros usados
  - “carros usados”
  - “carros usados” e Ford
  - “carros usados” e (Ford ou Fiat) e Não caminhões
  - Ver Google QuickRef (Links na pagina pessoal ou http://migre.me/4yCB)
- Os conectivos lógicos E (and), OU (or) e NÃO (Not) estão disponíveis em muitas linguagens de programação.