LISTA DE EXERCÍCIOS – 2.1/2.2/2.4 – Demonstrações, Inducão e Recursividade

1. Se n = 25, 100 ou 169, então n é um quadrado perfeito e é uma soma de dois quadrados perfeitos.
2. Se n é um inteiro par, $4 \leq n \leq 12$, então n é uma soma de dois números primos.
3. A soma de dois inteiros pares é par. (faça uma demonstração direta).
4. A soma de dois inteiros pares é par. (faça uma demonstração por absurdo)
5. A soma de dois inteiros ímpares é par.
6. O quadrado de um número inteiro par é divisível por 4.
7. Para x e y números positivos, $x<y$, se e somente se, $x^2<y^2$.
8. Se dois inteiros são divisíveis por n, então sua soma é divisível por n.
9. Se o produto de dois inteiros não é divisível por um inteiro n, então nenhum dos inteiros é divisível por n.

Use a indução matemática para provar que as proposições dadas são verdadeiras para todo inteiro positivo n.

10. $2+6+10+...+(4n-2) = 2n^2$
11. $1+5+9+...+(4n-3) = n(2n-1)$
12. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$
13. $2+6+18+...+2.3^{n-1} = 3^n-1$
14. Prove que $n^2 \geq 2n + 3$ para $n \geq 3$.
15. Prove que $n^2 > n + 1$para $n \geq 2$.
16. Prove que $n! > n^2$ para $n \geq 4$.
17. Prove que $2^n < n!$ para $n \geq 4$.

Para os exercícios 18 e 19, escreva os cinco primeiros valores da sequência.

18. $S(1) = 10$
    $S(n) = S(n-1) + 10$ para $n \geq 2$
19. $A(1) = 2$
    $A(n) = \frac{1}{A(n-1)}$ para $n \geq 2$

20. Prove a propriedade dada dos números de Fibonacci diretamente da definição:
    a. $F(n+1) + F(n-2) = 2F(n)$ para $n \geq 3$
    b. $F(n)=5F(n-4) + 3F(n-5)$ para $n \geq 6$
    c. $[F(n+1)]^2=[F(n)]^2+F(n-1)F(n+2)$ para $n \geq 2$