Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quinta-feira, 10 de Julho

2025
Turma E5

Exercício 1 Deseja-se encontrar todas as raízes da equação

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Para isso, observe que

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}, z \neq 1$$

Logo, a equação que se deseja resolver, torna-se

$$\frac{1 - z^5}{1 - z} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - z^5 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[5]{1}$$

Ou seja

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$$

Em outras palavras,

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}$$

Exercício 2 Considerando $z = x + iy$, a função em questão pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = 0$$

Observe que

$$u_x(x, y) = 1$$

$$u_y(x, y) = 0$$

$$v_x(x, y) = 0$$

$$v_y(x, y) = 0$$

e usando as equações de **Cauchy-Riemann**, observe que

$$u_x(x, y) \neq v_y(x, y), \forall z \in \mathbb{C}$$

Ou seja, f não é diferenciável em todo $\mathbb{C}$, portanto $f'(0)$ não existe. ■

Exercício 3 Considerando

$$w = \operatorname{Ln} z$$

a equação em questão torná-se

$$w^2 + w + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Para $w = w_1$, tem-se

$$\operatorname{Ln} z = w_1 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

e para $w = w_2$,

$$\operatorname{Ln} z = w_2 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

■

Exercício 4 Considere

$$f(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta}$$

e observe que

$$f(-\theta) = \frac{\cos(-2\theta)}{2 - \cos(-\theta)} = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} = f(\theta)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Para o cálculo desta integral considere a curva

$$|z| = 1$$

cujas parametrização é dada por

$$C : z(\theta) = e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta < \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_C \frac{1 - 2 \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2}{2 - \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 - 4z + 1)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2(z^2 - 4z + 1)}$$

e z_k são os polos de f no interior da curva C .

Calculando os polos de f , encontra-se

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Sendo z_0 um **polo ordem 2**, z_1 e z_2 **polos simples** mas, apenas z_0 e z_1 estão no interior da curva C . Calculando agora os resíduos,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 2 \frac{z^5 - 6z^4 + 2z^3 - z + 2}{z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_1) &= \left. \frac{z^4 + 1}{[z^2(z^2 - 4z + 1)]'} \right|_{z=z_1} \\ &= \frac{z_1^4 + 1}{z_1^2(z_1 - z_2)} \\ &= -\frac{7}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= -\pi \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) \right] \\ &= -\pi \left(4 - \frac{7}{3}\sqrt{3} \right) \\ &= \left(\frac{7}{3}\sqrt{3} - 4 \right) \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Deseja-se calcular a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Considere

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + 1}$$

e observe que

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6 + 1} = \frac{x^4}{x^6 + 1} = f(x)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Para o cálculo da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

perceba inicialmente que o denominador é polinomial e possui grau 2 unidades a mais que o numerador que também é polinomial. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \int_C \frac{z^4}{z^6 + 1} dz \\ &= 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde C é a curva fechada formada pela reta sobre o eixo x , com $-R \leq x \leq R$ e o arco correspondente à metade superior do círculo $|z| = R$ com $R \in \mathbb{R}$ grande o suficiente para que C contenha em seu interior todos os polos z_k de $f(z)$ que estão acima do eixo x .

Os polos de $f(z)$ são obtidos como zeros da função

$$g(z) = z^6 + 1$$

Ou seja,

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$z_k = \sqrt[6]{-1}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

com, $k = 0, 1, 2$. Assim

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$z_1 = i$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$$

são **polos simples**, uma vez que são raízes de multiplicidade 1 da função g e estão acima do eixo x . Portanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= 2\pi i \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}(f, z_2) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^4}{6z_0^5} + \frac{z_1^4}{6z_1^5} + \frac{z_2^4}{6z_2^5} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3} + i} + \frac{1}{i} + \frac{2}{-\sqrt{3} + i} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■