Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

1 º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2025**
Data: Segunda-feira, 7 de Julho **Turma E5**

Exercício 1 *Inicialmente observe que a função*

$$f(z) = z\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right)$$

possui apenas um polo em $z_0 = 0$ e este está dentro da curva $|z| = 2$. Logo, de acordo com o ***Teorema dos Resíduos***, *tem-se que*

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=2} z\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = \mathrm{Res}(f, z_0)$$

Uma das maneiras de se realizar este cálculo é através da ***série de Laurent*** *da função f em torno de $z = z_0$. Para isto, perceba que*

$$\mathrm{sen}\, z = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{z}{(2n+1)!z^{2n+1}}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!z^{2n}}\\
&= 1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(z) = 1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120z^4} + \cdots$$

e,

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi\mathbf{i}}\oint_{|z|=2} z\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{z}\right) dz = 0$$

■

Exercício 2 *Os polos da função*

$$f(z) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,(z^2)}$$

correspondem aos valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}\,(z^2) &= 0 && \Rightarrow\\
z^2 &= k\pi && \Rightarrow\\
z &= \sqrt{k\pi},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Considere

$$g(z) = \mathrm{sen}\left(z^2\right)$$

e observe que, para $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
g'(z) &= 2z\cos\left(z^2\right) && \Rightarrow\\
g'(z_k) &= 2z_k\cos\left(z_k^2\right)\\
&= 2\left(\sqrt{k\pi}\right)\cos\left(k\pi\right)\\
&= 2\sqrt{k\pi}\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

Ou seja, z_k, $k \neq 0$, são ***polos simples*** *da função f. Para $k = 0$, tem-se*

$$\begin{aligned}
g'(z_0) &= 2\,(0)\cos\,(0)\\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g''(z) &= 2\cos\left(z^2\right) - 4z^2\mathrm{sen}\left(z^2\right) && \Rightarrow\\
g''(z_0) &= 2\cos\,(0)\\
&= 2\\
&\neq 0
\end{aligned}$$

e z_0 é portanto, um ***polo de ordem 2*** *da função f.* ■

Exercício 3 *Deseja-se calcular a integral*

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}dx$$

Considere

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6+1}$$

e oberve que

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6+1} = \frac{x^4}{x^6+1} = f(x)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx$$

Para o cálculo da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx$$

perceba inifialmente que o denominador é polinomial e possui grau 2 unidades a mais que o numerador que também é polinomial. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx &= \int_C \frac{z^4}{z^6+1}dz \\ &= 2\pi\mathbf{i}\sum \mathrm{Res}(f, z_k)\end{aligned}$$

onde C é a curva fechada formada pela reta sobre o eixo x, com $-R \le x \le R$ e o arco correspondente à metade superior do círculo $|z| = R$ com $R \in \mathbb{R}$ grande o suficiente para que C contenha em seu interior todos os polos z_k de $f(z)$ que estão acima do eixo x.

Os polos de $f(z)$ são obtidos como zeros da função

$$g(z) = z^6 + 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} z^6 + 1 = 0 &\Rightarrow \\ z_k &= \sqrt[6]{-1} \\ &= \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi+2k\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

com $, k = 0, 1, 2$. Assim

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}+\mathbf{i}}{2}$$

$$z_1 = \mathbf{i}$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3}+\mathbf{i}}{2}$$

*são **polos simples**, uma vez que são ráizes de multiplicidade 1 da função g e estão acima do eixo x.*

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx &= 2\pi\mathbf{i}\,\Big[\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \\ &\quad + \mathrm{Res}(f, z_2)\Big] \\ &= 2\pi\mathbf{i}\left(\frac{z_0^4}{6z_0^5} + \frac{z_1^4}{6z_1^5} + \frac{z_2^4}{6z_2^5}\right) \\ &= \frac{\pi\mathbf{i}}{3}\left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) \\ &= \frac{\pi\mathbf{i}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}+\mathbf{i}} + \frac{1}{\mathbf{i}} + \frac{2}{-\sqrt{3}+\mathbf{i}}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considere*

$$f(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta}$$

e observe que

$$f(-\theta) = \frac{\cos(-2\theta)}{2-\cos(-\theta)} = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} = f(\theta)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta}d\theta &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2-\cos\theta}d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - 2\mathrm{sen}^2\theta}{2-\cos\theta}d\theta\end{aligned}$$

Para o cálculo desta integral considere a curva

$$|z| = 1$$

cuja parametrização é dada por

$$C : z(\theta) = e^{\mathbf{i}\theta},\ -\pi \le \theta < \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{\mathbf{i}\theta}\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{\mathbf{i}\,z}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2}$$
$$= \frac{z - z^{-1}}{2\mathbf{i}}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2}$$
$$= \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2\theta}{2 - \cos\theta} d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_C \frac{1 - 2\left(\frac{z - z^{-1}}{2\mathbf{i}}\right)^2}{2 - \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{\mathbf{i}\,z}$$
$$= -\frac{1}{2\mathbf{i}}\int_C \frac{z^4 + 1}{z^2\left(z^2 - 4z + 1\right)} dz$$
$$= -\frac{1}{2\mathbf{i}} 2\pi\mathbf{i} \sum \operatorname{Res}(f, z_k)$$

onde

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2\left(z^2 - 4z + 1\right)}$$

e z_k são os polos de f no interior da curva C.

Calculando os polos de f, encontra-se

$$z_0 = 0$$
$$z_1 = 2 - \sqrt{3}$$
$$z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

*Sendo z_0 um **polo ordem 2**, z_1 e z_2 **polos simples** mas, apenas z_0 e z_1 estão no interior da curva C. Calculando agora os resíduos,*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z)$$
$$= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z^2 - 4z + 1}$$
$$= \lim_{z \to 0} 2\frac{z^5 - 6z^4 + 2z^3 - z + 2}{z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 1}$$
$$= 4$$

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \left.\frac{z^4 + 1}{\left[z^2\left(z^2 - 4z + 1\right)\right]'}\right|_{z = z_1}$$
$$= \frac{z_1^4 + 1}{z_1^2(z_1 - z_2)}$$
$$= -\frac{7}{3}\sqrt{3}$$

Assim

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos\theta} d\theta = -\pi\left[\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)\right]$$
$$= -\pi\left(4 - \frac{7}{3}\sqrt{3}\right)$$
$$= \left(\frac{7}{3}\sqrt{3} - 4\right)\pi$$

■

Exercício 5 *Observe que*

$$\oint \frac{dz}{\bar{z} - b} = \oint \frac{dz}{\bar{z}\frac{z}{z} - b}$$
$$= \oint \frac{dz}{\frac{|z|^2}{z} - b}$$
$$= \oint \frac{z\,dz}{|z|^2 - bz}$$

Como a curva em questão é dada por $|z| = a$, segue-se que

$$\oint \frac{dz}{\bar{z} - b} = \oint \frac{z\,dz}{a^2 - bz}$$

onde z_k são os polos da função

$$f(z) = \frac{z}{a^2 - bz}$$

que são obtidos como soluções da equação

$$a^2 - bz = 0$$

Ou seja

$$z_0 = \frac{a^2}{b}$$

é o único polo da função f e é um polo simples, uma vez que é um zero de multiplicidade 1 da equação anterior. Além disso, sabe-se que

$$a < |b|$$

Ou seja,

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^2 < ab \Rightarrow 0 < \frac{a^2}{b} < a$$

e disto conclui-se que z_0 está dentro da curva $|z| = a$. Do Teorema dos Resíduos,segue-se que

$$\begin{aligned}\oint \frac{dz}{\bar{z} - b} &= 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f, z_0) \\ &= 2\pi\mathbf{i}\,\left.\frac{z}{(a^2 - bz)'}\right|_{z=z_0} \\ &= -2\pi\mathbf{i}\frac{z_0}{b} \\ &= -2\pi\mathbf{i}\left(\frac{a}{b}\right)^2\end{aligned}$$

■