Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\mathrm{o}}$. Edson

1$^{\mathrm{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2025**
Data: Segunda-feira, 14 de Abril **Turma E5**

Exercício 1 *Sejam z_1, z_2 números complexos tais que*

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 2 \\ z_1 - z_2 = \mathbf{i} \end{cases}$$

De acordo com a segunda equação deste sistema,

$$z_1 = z_2 + \mathbf{i}$$

Logo, substituindo na primeira equação, tem-se

$$(z_2 + \mathbf{i})\, z_2 = 2 \Rightarrow$$

$$z_2^2 + \mathbf{i} z_2 - 2 = 0$$

Ou seja,

$$z_2 = \frac{-\mathbf{i} \pm \sqrt{7}}{2}$$

e

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + \mathbf{i} \\ &= \frac{-\mathbf{i} \pm \sqrt{7}}{2} + \mathbf{i} \\ &= \frac{\mathbf{i} \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\mathbf{i} + \sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-\mathbf{i} + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{\mathbf{i} - \sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-\mathbf{i} - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

■

Exercício 2 *Considere o número complexo*

$$\begin{aligned} z_1 &= (4 + 4\mathbf{i}) - (3 + \mathbf{i}) \\ &= 1 + 3\mathbf{i} \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} w &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2} \\ &= \mathbf{i} \end{aligned}$$

representa uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido antihorário, logo o complexo

$$\begin{aligned} z_2 &= w\, z_1 \\ &= \mathbf{i}\,(1 + 3\mathbf{i}) \\ &= -3 + \mathbf{i} \end{aligned}$$

é ortogonal ao vetor representado por z_1, o seja

$$\begin{aligned} z_3 &= (3 + \mathbf{i}) + \alpha\, z_2, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &= (3 + \mathbf{i}) + \alpha\,(-3 + \mathbf{i}) \\ &= 3\,(1 - \alpha) + \mathbf{i}\,(1 + \alpha) \end{aligned}$$

em particular, para $\alpha = 1$, tem-se

$$z_3 = 2\mathbf{i}$$

e os complexos $3 + \mathbf{i}$, $4 + 4\mathbf{i}$ e $2\mathbf{i}$, formam um triângulo retângulo. ■

Exercício 3 *Deseja-se encontrar todas as raízes da equação*

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Para isso, observe que

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}, \; z \neq 1$$

Logo, a equação que se deseja resolver, torna-se

$$\frac{1 - z^5}{1 - z} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - z^5 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[5]{1}$$

Ou seja

$$z = \cos\frac{2k\pi}{5} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{2k\pi}{5}, \; k = 1, 2, 3, 4$$

Em outras palavras,

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos\frac{6\pi}{5} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{8\pi}{5}$$

Obs.: *Esta questão foi cancelada. O termo z^3 foi esquecido por este professor e os pontos referentes à questão foram dados aos que participaram da prova.* ■

Exercício 4

a). *Considere $z = x + \mathbf{i}y$ e observe que a função pode ser reescrita como*

$$\begin{aligned} f(z) &= (x-1)^2 + \mathbf{i}y^2 + z^2 \\ &= (x-1)^2 + \mathbf{i}y^2 + (x+\mathbf{i}y)^2 \\ &= (x-1)^2 + \mathbf{i}y^2 + x^2 + 2xy\mathbf{i} - y^2 \\ &= (x-1)^2 + x^2 - y^2 + \mathbf{i}\left(y^2 + 2xy\right) \\ &= u(x,y) + \mathbf{i}\,v(x,y) \end{aligned}$$

sendo

$$u(x,y) = (x-1)^2 + x^2 - y^2$$
$$v(x,y) = y^2 + 2xy$$

Logo

$$u_x = 2\,(2x-1)$$
$$u_y = -2y$$

$$v_x = 2y$$
$$v_y = 2y + 2x$$

*Perceba que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Usando as equações de **Cauchy-Euler**, ou seja*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow \quad x - y = 1$$

Ou seja, a função f é diferenciável apenas para os complexos sobre a reta $x - y = 1$. □

b). *Considere agora a função*

$$f(z) = x + \mathbf{i}\,|y|$$

Perceba que, para $y > 0$, tem-se

$$f(z) = x + \mathbf{i}y$$

Sendo

$$u(x,y) = x$$
$$v(x,y) = y$$

Logo

$$u_x = 1$$
$$u_y = 0$$

$$v_x = 0$$
$$v_y = 1$$

*Perceba que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Usando as equações de **Cauchy-Euler**, ou seja*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

O que nos permite afirmar que f é diferenciável para $z \in \mathbb{C}$, com $y > 0$. Por outro lado, para $y < 0$ tem-se

$$f(z) = x - \mathbf{i}y$$

Sendo

$$u(x,y) = x$$
$$v(x,y) = -y$$

Logo

$$u_x = 1$$
$$u_y = 0$$

$$v_x = 0$$
$$v_y = -1$$

*Perceba que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Novamente, pelas equações de **Cauchy-Euler**, tem-se que f não é diferenciável para $z \in \mathbb{C}$, com $y < 0$. Por fim, quando $y = 0$, ou seja os complexos sobre o eixo real, considere um complexo qualquer $z_0 = x_0$ e os caminhos*

$$C_0 : \Delta z = \mathbf{i}t,\ t \to 0^+$$
$$C_1 : \Delta z = \mathbf{i}t,\ t \to 0^-$$

Observe que, sobre C_0, tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x_0 + \mathbf{i}t) - f(x_0)}{\mathbf{i}t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{x_0 + \mathbf{i}t - x_0}{\mathbf{i}t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Porém, sobre C_1, tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{f(x_0 + \mathbf{i}t) - f(x_0)}{\mathbf{i}t} \\ &= \lim_{t \to 0^-} \frac{x_0 - \mathbf{i}t - x_0}{\mathbf{i}t} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ou sej, f não é diferenciável para os complexos z, com $y = 0$. ■

Exercício 5

a). *Considere $z = x + \mathbf{i}y$ e observe que a função em questão pode ser rescrita da seuinte maneira*

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^x (\cos y + \mathbf{i} \,\text{sen}\, y) \\ &= e^x \cos y + \mathbf{i}\, e^x \text{sen}\, y \\ &= u(x,y) + \mathbf{i}\, v(x,y) \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \\ v(x,y) &= e^x \text{sen}\, y \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \\ u_y &= -e^x \text{sen}\, y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_x &= e^x \text{sen}\, y \\ v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Perceba que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$ e que,

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

*Ou seja, as equações de **Cauchy-Euler** são verdadeiras para todos os números complexos. Conclui-se portanto que f é diferenciável em todo o $\mathbb{C}$ e, consequentemente, contínua em todo o $\mathbb{C}$.* □

b). *Deseja-se calcular o limite*

$$\lim_{z \to -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}}\right)}$$

Tendo em vista que e^z é contínua em todo o $\mathbb{C}$ segue-se que

$$\lim_{z \to -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}}\right)} = e^{\left(\lim_{z \to -\pi \mathbf{i}} \frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}}\right)}$$

*e, usando a **Regra de L'Hospital**,*

$$\begin{aligned} \lim_{z \to -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}}\right)} &= e^{\left(\lim_{z \to -\pi \mathbf{i}} 2z\right)} \\ &= e^{-2\pi i} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 6 *Observe que*

$$\begin{aligned} (z-1)^5 &= z^5 & \Rightarrow \\ \frac{(z-1)^5}{z^5} &= 1 & \Rightarrow \\ \left(\frac{z-1}{z}\right)^5 &= 1 & \Rightarrow \\ \frac{z-1}{z} &= \sqrt[5]{1} & \Rightarrow \\ z - 1 &= \sqrt[5]{1} z & \Rightarrow \\ z - \sqrt[5]{1} z &= 1 & \Rightarrow \\ z\left(1 - \sqrt[5]{1}\right) &= 1 & \Rightarrow \\ z &= \frac{1}{\left(1 - \sqrt[5]{1}\right)} \end{aligned}$$

Onde

$$\sqrt[5]{1} = e^{\frac{2k\pi}{5}}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

■