Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^{o}. Edson

2 º Semestre

Gabarito Prova Final **2023**
Data: Quarta-feira, 19 de Junho **Turma E5**

Exercício 1 *Sabendo que*

$$z^{-1} + z = 2\cos\theta$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} + z = 2\cos\theta \Rightarrow \\ \frac{1+z^2}{z} = 2\cos\theta \Rightarrow \\ z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação do segundo grau, tem-se

$$z_1 = \cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i}$$

ou

$$z_2 = \cos\theta - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i}$$

Assim para $z = z_1$, tem-se que

$$\begin{aligned} z^{-2-24} + z^{2024} &= (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})^{-2024} + \\ &\quad + (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})^{2024} \\ &= \cos(2024\,\theta) - \operatorname{sen}\,(2024\theta)\ \mathbf{i} + \\ &\quad + \cos(2024\,\theta) + \operatorname{sen}\,(2024\theta)\ \mathbf{i} \\ &= 2\cos(2024\,\theta) \end{aligned}$$

e para $z = z_2$

$$\begin{aligned} z^{-2-24} + z^{2024} &= (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})^{-2024} + \\ &\quad + (\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i})^{2024} \\ &= \cos(2024\,\theta) + \operatorname{sen}\,(2024\theta)\ \mathbf{i} + \\ &\quad + \cos(2024\,\theta) - \operatorname{sen}\,(2024\theta)\ \mathbf{i} \\ &= 2\cos(2024\,\theta) \end{aligned}$$

. ■

Exercício 2 *Uma parametrização possível para o segmento C é dado por*

$$z(t) = (1-t) + \mathbf{i}\,(t)\,;\ 0 \le t \le 1$$

Logo

$$z'(t) = -1 + \mathbf{i}$$

e

$$\begin{aligned} \int_C \left(x^2 + \mathbf{i}y^3\right) dz &= \int_0^1 \left[(1-t)^2 + \mathbf{i}\,t^3\right](-1+\mathbf{i})\,dt \\ &= \int_0^1 \left(1 - 2t + t^2 + \mathbf{i}\,t^3\right)(-1+\mathbf{i})\,dt \\ &= \int_0^1 \big[-1 + \mathbf{i} + (2-2\mathbf{i})\,t - \\ &\quad + (\mathbf{i}-1)\,t^2 - (\mathbf{i}+1)\,t^3\big]\,dt \\ &= (-1+\mathbf{i})\,t + (1-\mathbf{i})\,t^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3}(\mathbf{i}-1)\,t^3 - \frac{1}{4}(\mathbf{i}+1)\,t^4\Big|_0^1 \\ &= \frac{\mathbf{i}-7}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Tendo em vista que a função $f(z) = z^2e^z$ é o produto de duas função analíticas em todo o conjunto $\mathbb{C}$, segue-se que f é também analítica em $\mathbb{C}$. Desta forma para a resolução da integral em questão é suficiente encontrar uma primitiva de f e usar o* ***Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Contorno****. Para isto, usando* ***integração por partes****, considere*

$$\begin{cases} u = z^2 \\ dv = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2z\,dz \\ v = e^z \end{cases}$$

Logo,

$$\int z^2e^z dz = z^2e^z - 2\int e^z z\,dz$$

Repetindo o processo, considere

$$\begin{cases} p = z \\ dq = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dp = dz \\ q = e^z \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \int e^z z\,dz &= ze^z - \int e^z dz \\ &= ze^z - e^z + k \\ &= e^z(z-1) + k,\ k \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Retornando a integral original, tem-se

$$\begin{aligned}\int z^2e^z dz &= z^2e^z - 2\int e^z z\,dz\\ &= z^2e^z - 2\left[e^z\left(z-1\right)+k\right]\\ &= e^z\left(z^2-2z+2\right)+2k\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi\mathbf{i}} z^2e^z dz &= e^z\left(z^2-2z+2\right)\Big|_0^{\pi\mathbf{i}}\\ &= e^{\pi\mathbf{i}}\left(-\pi^2-2\pi\mathbf{i}+2\right)-2\\ &= \pi^2+2\pi\mathbf{i}-4\end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Observe que a função sob a integral*

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=-5}^{+\infty}\frac{1}{(z+\mathbf{i})^n\,(n+6)!}\\ &= \sum_{n=-5}^{+\infty}\frac{(z+\mathbf{i})^{-n}}{(n+6)!}\end{aligned}$$

possui sua expressão na forma de uma ***série de Laurent*** *em torno do ponto $z_0 = -\mathbf{i}$ que é* ***polo essencial*** *da função (único polo, inclusive!). Além disto, perceba que o coeficiente do termo $(z+\mathbf{i})^{-1}$ ocorre quando $n=1$, ou seja*

$$a_{-1} = \frac{1}{7!}$$

e o polo z_0 encontra-se no interior da curva $|z-\mathbf{i}| = 3$. Assim, pelo ***teorema dos resíduos***, *segue-se que*

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= 2\pi\mathbf{i}\,a_{-1}\\ &= \frac{2\pi\mathbf{i}}{7!}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere C sendo o círculo unitário centrado na origem cuja parametrização pode ser dada por*

$$z = e^{\mathbf{i}\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{\mathbf{i}z}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{z+z^{-1}}{2\mathbf{i}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\theta &= \frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2-\left(e^{i\theta}\right)^{-2}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{z^2-z^{-2}}{2\mathbf{i}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta &= \oint_C\frac{\frac{z^2-z^{-2}}{2\mathbf{i}}}{5-4\frac{z-z^{-1}}{2\mathbf{i}}}\frac{dz}{\mathbf{i}z}\\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\oint_C\frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}dz\end{aligned}$$

A função

$$f(z) = \frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}$$

sob a integral possui polos em

$$z_0 = 0$$

e

$$5\mathbf{i}z-2z^2+2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{\mathbf{i}}{2}\,e\,z_2 = 2\mathbf{i}$$

sendo z_0 de ***ordem 2*** *e z_1 e z_2* ***polos simples***. *Apenas os polos z_0 e z_1 encontram-se no interior do círculo C, portanto*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta = \frac{1}{2\mathbf{i}}2\pi\mathbf{i}\sum_{k=0}^{1}\operatorname{Res}\left(f(z),z_k\right)$$

Onde

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) &= \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}(z-z_0)^2 \frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)} \\
&= \lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4-1}{\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)} \\
&= \frac{5\mathbf{i}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f(z), z_1\right) &= \frac{z_1^4-1}{\left[z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)\right]'\Big|_{z=z_1}} \\
&= \frac{z_1^4-1}{-8z_1^3+15\mathbf{i}z_1^2+4z_1} \\
&= -\frac{5\mathbf{i}}{4}
\end{aligned}
$$

Ou seja

$$
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta} d\theta = 0
$$

■