Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2 º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2023**
Data: Sexta-feira, 14 de Junho **Turma E5**

Exercício 1 *Inicialmente observe que a função*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k$$

*possui sua expressão na forma de uma **série de Taylor**, em torno de $z_0 = 0$ ou seja f é **analítica** em todo o $\mathbb{C}$ (a rigor isto deveria ser verificado através de algum teste de convergência, como o **Teste da Razão** por exemplo).*

Segue-se disto que a função sob a integral,

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^4}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k}{z^4}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^{k-4}$$

$$= \frac{1}{3} z^{-3} + \frac{8}{9} z^{-2} + z^{-1} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^{k-4}$$

*possui sua expressão na forma de uma **série de Laurent** em torno de $z_0 = 0$ que é um polo da função g e tal polo está no interior da curva C.*

Sabe-se que

$$2\pi \mathbf{i}\, a_{-1} = \int_C g(z) dz$$

onde a_{-1} é o coeficiente do termo z^{-1} na série de Laurent em torno de z_0 e C uma curva fechada que tenha z_0 em seu interior (o que é o caso). Ou seja

$$\int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = 2\pi \mathbf{i}$$

. □

(Outro Modo:) *Uma vez que f possui uma expressão em série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ segue-se que f é **analítica** em todoo $\mathbb{C}$ (a rigor isto deveria ser verificado através de algum teste de convergência, como o **Teste da Razão** por exemplo) e a função*

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^4}$$

*tem z_0 como um polo de ordem 4 no interior da curva C. Pelo **Teorema dos Resíduos** tem-se que*

$$\int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = 2\pi \mathbf{i} \operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^4}, z_0\right)$$

$$= 2\pi \mathbf{i} \frac{1}{3!} \lim_{z \to 0} \frac{d^3}{dz^3} \left(z^4 \frac{f(z)}{z^4}\right)$$

$$= \frac{2\pi \mathbf{i}}{6} \lim_{z \to 0} \frac{d^3}{dz^3} f(z)$$

$$= \frac{2\pi \mathbf{i}}{6} \lim_{z \to 0} f'''(z)$$

Observe que

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k\, z^{k-1}$$

$$f''(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1) z^{k-2}$$

$$f'''(z) = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3}$$

$$= 3! + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3}$$

Ou seja,

$$\int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = \frac{2\pi \mathbf{i}}{6} \lim_{z \to 0} \left[3! + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3}\right]$$

$$= \frac{2\pi \mathbf{i}}{6} 3!$$

$$= 2\pi \mathbf{i}$$

. ■

Exercício 2 *Observe que a função sob a integral*

$$f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{1}{(z+\mathbf{i})^n\,(n+6)!}$$

$$= \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{(z+\mathbf{i})^{-n}}{(n+6)!}$$

possui sua expressão na forma de uma ***série de Laurent*** *em torno do ponto* $z_0 = -\mathbf{i}$ *que é* ***polo essencial*** *da função (único polo, inclusive!). Além disto, perceba que o coeficiente do termo* $(z+\mathbf{i})^{-1}$ *ocorre quando* $n = 1$*, ou seja*

$$a_{-1} = \frac{1}{7!}$$

e o polo z_0 *encontra-se no interior da curva* $|z - \mathbf{i}| = 3$*. Assim, pelo* ***teorema dos resíduos****, segue-se que*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi\mathbf{i}\,a_{-1}$$
$$= \frac{2\pi\mathbf{i}}{7!}$$

■

Exercício 3 *Observe inicialmente que* $z = 0$ *(um possível candidato a polo da função) é raíz do numerador e do denominador simultaneamente, isto não pode ocorrer (para ser polo é necessário ser zero apenas do denominador). Reescreva a função da seguinte maneira*

$$f(z) = \frac{z\left(\dfrac{\operatorname{sen} z}{z} - 1\right)}{z \operatorname{senh} z}$$
$$= \frac{\dfrac{\operatorname{sen} z}{z} - 1}{\operatorname{senh} z}$$

Assim, os polos de f *são a raizes da equação*

$$\operatorname{senh} z = 0 \Rightarrow$$
$$\tfrac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Rightarrow$$
$$e^z - \tfrac{1}{e^z} = 0 \Rightarrow$$
$$e^{2z} - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$z_k = k\pi\mathbf{i},\ k \in \mathbb{Z}$$

(Perceba que $z = 0$ *aparece novamente como polo da função, porém será um polo simples. Não tivesse sido excluído anteriormente, teria ordem 2, o que seria um erro!). Assim,*

$$\operatorname{Res}(f(z), z_k) = \lim_{z \to z_k} (z - z_k) f(z)$$
$$= \frac{\operatorname{sen} z_k - z_k}{(z \operatorname{senh} z)'\big|_{z=z_k}}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} z_k - z_k}{\operatorname{senh} z_k + z_k \cosh z_k}$$
$$= \frac{\operatorname{sen} k\pi\mathbf{i} - k\pi\mathbf{i}}{k\pi\mathbf{i} \cosh k\pi\mathbf{i}}$$
$$= \frac{-1}{\cosh k\pi\mathbf{i}}$$
$$= \frac{1}{(-1)^{k+1}}$$

para $k \neq 0$*. Para* $k = 0$*, tem-se o polo* $z = 0$ *e*

$$\operatorname{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \to 0} z f(z)$$
$$= \lim_{z \to 0} z \frac{\operatorname{sen} z - z}{z \operatorname{senh} z}$$
$$= \lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z - z}{\operatorname{senh} z}$$
$$= \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{\cosh z}$$
$$= 0$$

Obs.: *Quem não soube lidar com o polo* $z = 0$ *não será penalizado por isso.* ■

Exercício 4 *Para encontrar os polos da função sob a integração é necessário resolver a seguinte equação*

$$\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) - 1 = 0 \Rightarrow$$
$$\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) = 1 \Rightarrow$$
$$\operatorname{Ln} z = e \Rightarrow$$
$$z = e^e$$

Ou seja, a função dada possui único polo simples em $z_0 = e^e$ *e este está no interior da curva* $|z - 16| = 5$*.*

Portanto

$$\begin{aligned}\oint \frac{dz}{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z)-1} &= 2\pi\mathbf{i}\,\operatorname{Res}\left(\frac{1}{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z)-1}, z_0\right)\\ &= 2\pi\mathbf{i}\frac{1}{\left.(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z)-1)'\right|_{z=z_0}}\\ &= 2\pi\mathbf{i}\frac{1}{\left.\frac{1}{\operatorname{Ln} z}\frac{1}{z}\right|_{z=e^e}}\\ &= 2\pi\mathbf{i}\, e^{e+1}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere C sendo o círculo unitário centrado na origem cuja parametrização pode ser dada por*

$$z = e^{\mathbf{i}\theta},\ -\pi \le \theta \le \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{\mathbf{i}z}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{z+z^{-1}}{2\mathbf{i}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}2\theta &= \frac{e^{i2\theta}-e^{-i2\theta}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{\left(e^{i\theta}\right)^2-\left(e^{i\theta}\right)^{-2}}{2\mathbf{i}}\\ &= \frac{z^2-z^{-2}}{2\mathbf{i}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta &= \oint_C \frac{\frac{z^2-z^{-2}}{2\mathbf{i}}}{5-4\frac{z-z^{-1}}{2\mathbf{i}}}\frac{dz}{\mathbf{i}z}\\ &= \frac{1}{2\mathbf{i}}\oint_C \frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}dz\end{aligned}$$

A função

$$f(z) = \frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}$$

sob a integral possui polos em

$$z_0 = 0$$

e

$$5\mathbf{i}z - 2z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{\mathbf{i}}{2}\ e\ z_2 = 2\mathbf{i}$$

*sendo z_0 de **ordem 2** e z_1 e z_2 **polos simples**. Apenas os polos z_0 e z_1 encontram-se no interior do círculo C, portanto*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta = \frac{1}{2\mathbf{i}}2\pi\mathbf{i}\sum_{k=0}^{1}\operatorname{Res}\left(f(z), z_k\right)$$

Onde

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z), z_0\right) &= \lim_{z\to z_0}\frac{d}{dz}(z-z_0)^2\frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}z^2\frac{z^4-1}{z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}\\ &= \lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^4-1}{\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)}\\ &= \frac{5\mathbf{i}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}\left(f(z), z_1\right) &= \frac{z_1^4-1}{\left.\left[z^2\left(-2z^2+5\mathbf{i}z+2\right)\right]'\right|_{z=z_1}}\\ &= \frac{z_1^4-1}{-8z_1^3+15\mathbf{i}z_1^2+4z_1}\\ &= -\frac{5\mathbf{i}}{4}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\operatorname{sen}2\theta}{5-4\operatorname{sen}\theta}d\theta = 0$$

■