

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Segunda-feira, 20 de Maio de 2024

2023
Turma E5

Exercício 1 Considere $z = x + iy$ e observe que, para a função dada, tem-se

$$u(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2}$$

$$v(x, y) = \frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$$

Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Além disso, as funções u , v , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{C} - \{0\}$, o que garante que f é **analítica** em $\mathbb{C} - \{0\}$. ■

Exercício 2 Deseja-se resolver a equação

$$e^{z-1} = -ie^3$$

Para isto, observe que

$$e^{z-1} = -ie^3 \Rightarrow$$

$$z - 1 = \ln(-ie^3) \Rightarrow$$

$$z = 1 + \ln|-ie^3| + i \arg(-ie^3) \Rightarrow$$

$$z = 1 + \ln e^3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$$

$$z = 4 + i\left(\frac{4k-1}{2}\right)\pi$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 3 Uma parametrização possível para o segmento C é dado por

$$z(t) = (1 - t) + i(t); 0 \leq t \leq 1$$

Logo

$$z'(t) = -1 + i$$

e

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + iy^3) dz &= \int_0^1 [(1-t)^2 + it^3] (-1 + i) dt \\ &= \int_0^1 (1 - 2t + t^2 + it^3) (-1 + i) dt \\ &= \int_0^1 [-1 + i + (2 - 2i)t - \\ &\quad + (i - 1)t^2 - (i + 1)t^3] dt \\ &= (-1 + i)t + (1 - i)t^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3}(i - 1)t^3 - \frac{1}{4}(i + 1)t^4 \Big|_0^1 \\ &= \frac{i - 7}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Tendo em vista que a função $f(z) = z^2e^z$ é o produto de duas funções analíticas em todo o conjunto $\mathbb{C}$, segue-se que f é também analítica em $\mathbb{C}$. Desta forma para a resolução da integral em questão é suficiente encontrar uma primitiva de f e usar o **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Contorno**. Para isto, usando **integração por partes**, considere

$$\begin{cases} u = z^2 \\ dv = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2z dz \\ v = e^z \end{cases}$$

Logo,

$$\int z^2 e^z dz = z^2 e^z - 2 \int e^z z dz$$

Repetindo o processo, considere

$$\begin{cases} p = z \\ dq = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dp = dz \\ q = e^z \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int e^z z \, dz &= z e^z - \int e^z \, dz \\
 &= z e^z - e^z + k \\
 &= e^z (z - 1) + k, \, k \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

Retornando a integral original, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int z^2 e^z \, dz &= z^2 e^z - 2 \int e^z z \, dz \\
 &= z^2 e^z - 2 [e^z (z - 1) + k] \\
 &= e^z (z^2 - 2z + 2) + 2k
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi i} z^2 e^z \, dz &= e^z (z^2 - 2z + 2) \Big|_0^{\pi i} \\
 &= e^{\pi i} (-\pi^2 - 2\pi i + 2) - 2 \\
 &= \pi^2 + 2\pi i - 4
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Observe que a função

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)}$$

possui singularidades nos pontos

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 1$$

e ambos estão no interior da curva C , dada por $|z - 2| =$

5. Sejam C_0 e C_1 círculos de raio $\frac{1}{4}$ centrados em z_0 e

z_1 , respectivamente. Pelo **Teorema da Deformação dos Contornos**, segue-se que

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z-1)} = \oint_{C_0} \frac{dz}{z^3(z-1)} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z-1)}$$

e, usando as **Fórmulas Integrais de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_0} \frac{dz}{z^3(z-1)} &= \oint_{C_0} \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right) dz}{z^3} \\
 &= \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{z-1}\right)'' \Big|_{z_0} \\
 &= \pi i \frac{2}{(z-1)^3} \Big|_0 \\
 &= -2\pi i
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z-1)} &= \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{1}{z^3}\right) dz}{z-1} \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{z^3}\right) \Big|_{z_1} \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{z^3}\right) \Big|_1 \\
 &= 2\pi i
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{dz}{z^3(z-1)} &= -2\pi i + 2\pi i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■