Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^{o}. Edson

2 ^{o} Semestre

Gabario Prova Final **2022**
Data: Sexta-feira, 11 de Agosto de 2023 **Turma E5**

Exercício 1 *Observe inicialmente que*

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}}{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}}{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}}\left(\frac{-1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{-1-\sqrt{3}\mathbf{i}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\mathbf{i}$$

Logo,

$$\left\| \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}}{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}} \right\| = \sqrt{2}$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}}{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{3}$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}\mathbf{i}}{-1+\sqrt{3}\mathbf{i}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} - \mathbf{i}\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right)$$

■

Exercício 2 *Observe que*

$$\operatorname{sen} z = \cosh 3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{e^{\mathbf{i}z}-e^{-\mathbf{i}z}}{2\mathbf{i}} = \frac{e^{3}+e^{-3}}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2\mathbf{i}z} - 1 = \mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right)e^{\mathbf{i}z} \quad \Leftrightarrow$$

$$e^{2\mathbf{i}z} - \mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right)e^{\mathbf{i}z} - 1 = 0$$

Considerando

$$w = e^{\mathbf{i}z}$$

a equação anterior torna-se

$$w^2 - \mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right)w - 1 = 0$$

cuja solução é

$$w = \frac{\mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right) \pm \mathbf{i}\left(e^{3}-e^{-3}\right)}{2}$$

ou seja

$$w_0 = \frac{\mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right) + \mathbf{i}\left(e^{3}-e^{-3}\right)}{2}$$

$$= \mathbf{i}e^{3}$$

$$w_1 = \frac{\mathbf{i}\left(e^{3}+e^{-3}\right) - \mathbf{i}\left(e^{3}-e^{-3}\right)}{2}$$

$$= \mathbf{i}e^{-3}$$

Para $w = w_0$ tem–se

$$e^{\mathbf{i}z} = \mathbf{i}e^{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = \ln\left(\mathbf{i}e^{3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = \ln e^{3} + \mathbf{i}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = 3 + \mathbf{i}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$z = -3\mathbf{i} + \left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

e, para $w = w_1$, tem-se

$$e^{\mathbf{i}z} = \mathbf{i}e^{-3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = \ln\left(\mathbf{i}e^{-3}\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = \ln e^{-3} + \mathbf{i}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{i}z = -3 + \mathbf{i}\left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$z = 3\mathbf{i} + \left(\tfrac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

■

Exercício 3 *Considere $z = x + \mathbf{i}y$ e observe que*

$$f(z) = z\,|z|$$

$$= (x+\mathbf{i}y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= x\sqrt{x^2+y^2} + \mathbf{i}y\sqrt{x^2+y^2}$$

Ou seja, as partes real e imaginária de f são

$$u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

Perceba que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Segue-se portanto, das equações de Cauchy-Riemann, a função f será diferenciável, para os valores de x e y tais que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = \pm y \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$$

Portanto $z = 0$ é o único ponto onde f pode ser diferenciável, porém as derivadas parciais não estão definidas em $(0,0)$, ou seja f não é diferenciável em todo $\mathbb{C}$, e o mesmo segue-se para a sua analiticidade. ■

Exercício 4 *Observe que*

$$\begin{aligned} x^2+y^2 = 2x &\Leftrightarrow \\ (x-1)^2+y^2 = 1 \end{aligned}$$

Ou seja, a curva dara corresponde ao círculo de raio 1 e centro em $z=1$. Perceba ainda que os polos da função

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

são os zeros da equação

$$\begin{aligned} 1+z^4 = 0 &\Leftrightarrow \\ z^4 = -1 &\Leftrightarrow \\ z &= \sqrt[4]{-1} \\ &= (\cos\pi + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\pi)^{\frac{1}{4}} \\ &= \cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi+2k\pi}{4} \end{aligned}$$

com $k = 0,1,2,3$. Ou seja

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Como apenas z_0 e z_3 estão no interior da curva γ e são todos **polos simples**, segue-se que*

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,z_0) &= \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \\ &= \frac{1}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\mathbf{i}\sqrt{2})(\mathbf{i}\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,z_3) &= \lim_{z\to z_3}(z-z_3)f(z) \\ &= \frac{1}{(z_3-z_0)(z_3-z_1)(z_3-z_2)} \\ &= \frac{1}{(-\mathbf{i}\sqrt{2})(\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2})(\sqrt{2})} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)} \end{aligned}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_\gamma \frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi\mathbf{i}\left[\mathrm{Res}(f,z_0) + \mathrm{Res}(f,z_3)\right] \\ &= 2\pi\mathbf{i}\left[\frac{1}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}-1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}(\mathbf{i}+1)}\right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi\mathbf{i}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a curva $\gamma : |z| = 1$, cuja parametrização pode ser dada por*

$$z = e^{\mathbf{i}\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{\mathbf{i}\theta}\mathbf{i}d\theta \Leftrightarrow d\theta = -\mathbf{i}\frac{dz}{z}$$

e

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{e^{\mathbf{i}\theta}+e^{-\mathbf{i}\theta}}{2}\\ &= \frac{z+z^{-1}}{2}\\ &= \frac{z^2+1}{2z}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\frac{1-a\ \cos\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}d\theta\\ &= -\mathbf{i}\oint_\gamma \frac{1-a\ \frac{z^2+1}{2z}}{1-2a\frac{z^2+1}{2z}+a^2}\frac{dz}{z}\\ &= \frac{-\mathbf{i}}{-2}\oint_\gamma \frac{-az^2+2z-a}{az^2-(a^2+1)\,z+a}\frac{dz}{z}\\ &= -\frac{\mathbf{i}}{2}\oint_\gamma \frac{az^2-2z+a}{z\,(z-a)\,(az-1)}dz\end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{az^2-2z+a}{z\,(z-a)\,(az-1)}$$

*possui **três polos simples** em* $z_0 = 0$*,* $z_1 = a$ *e* $z_2 = \frac{1}{a}$*. Uma vez que* $|a| > 1$*, segue que apenas* z_0 *e* z_2 *encontram-se no interior da curva* γ*. Usando o **Teorema dos Resíduos**, tem-se*

$$\begin{aligned}A &= -\frac{\mathbf{i}}{2}2\pi\mathbf{i}\,[\mathrm{Res}(f,z_0)+\mathrm{Res}(f,z_2)]\\ &= \pi\left[\lim_{z\to 0} zf(z) + \lim_{z\to\frac{1}{a}}(z-\frac{1}{a})f(z)\right]\\ &= \pi\left[\lim_{z\to 0}\frac{az^2-2z+a}{(z-a)\,(az-1)} + \lim_{z\to\frac{1}{a}}\frac{az^2-2z+a}{az\,(z-a)}\right]\\ &= \pi\,[1-1]\\ &= 0\end{aligned}$$

■