

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3^a Prova
Data: Terça-feira, 08 de Agosto de 2023

2022
Turma E5

Exercício 1 Observe inicialmente que a função

$$f(z) = e^z \sinh z$$

é analítica em todo o plano complexo, tendo em vista ser o produto de duas funções analíticas em todo o $\mathbb{C}$. Segue-se disto que a integral em questão não depende do caminho escolhido. Além disto, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{4+2i} e^z \sinh z \, dz &= \int_0^{4+2i} e^z \frac{e^z - e^{-z}}{2} \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{4+2i} (e^{2z} - 1) \, dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2z}}{2} - z \right) \Big|_0^{4+2i} \\ &= \frac{1}{4} (e^{8+4i} - 4i - 9) \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Uma parametrização possível para o arco em questão é dada por

$$\gamma : z = 1 + i + e^{it}, -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2}$$

□

b). Segue-se que

$$\begin{aligned} \int_1^i \bar{z} \, dz &= - \int_{\gamma} \bar{z} \, dz \\ &= - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (1 - i + e^{-it}) i e^{it} \, dt \\ &= - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} [(i+1)e^{it} + i] \, dt \\ &= (i-1)e^{it} - it \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4-\pi}{2} i \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Observe que a função

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e^z(z^2-1)} \\ &= \frac{1}{e^z(z+1)(z-1)}, \end{aligned}$$

possui singularidades em $z_0 = -1$ e $z_1 = 1$, ambas no interior do quadrado dado em questão. Considerando $\gamma_0 : |z+1| = 1$ e $\gamma_1 : |z-1| = 1$, ambas orientadas no sentido horário, e usando o princípio da deformação dos contornos, segue-se que

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz}{e^z(z^2-1)} &= \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{e^z(z^2-1)} + \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{e^z(z^2-1)} \\ &= \oint_{\gamma_0} \frac{1}{e^z(z+1)} \, dz + \oint_{\gamma_1} \frac{1}{e^z(z-1)} \, dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{e^z(z-1)} \Big|_{z=-1} + \frac{1}{e^z(z+1)} \Big|_{z=1} \right] \\ &= -2\pi i \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \right) \\ &= -2\pi i \sinh 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Considere a curva $\gamma : |z| = 1$, cuja parametrização pode ser dada por

$$z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} i d\theta \Leftrightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

e

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \\ &= \frac{z^2 + 1}{2z} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \\
 &= -i \oint_{\gamma} \frac{1 - a \frac{z^2+1}{2z}}{1 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + a^2} \frac{dz}{z} \\
 &= \frac{-i}{2} \oint_{\gamma} \frac{-az^2 + 2z - a}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} \frac{dz}{z} \\
 &= -\frac{i}{2} \oint_{\gamma} \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)} dz
 \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)}$$

possui **três polos simples** em $z_0 = 0$, $z_1 = a$ e $z_2 = \frac{1}{a}$. Uma vez que $|a| < 1$, segue que apenas z_0 e z_1 encontram-se no interior da curva γ . Usando o **Teorema dos Resíduos**, tem-se

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{i}{2} 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\
 &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) + \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \right] \\
 &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} \frac{az^2 - 2z + a}{(z-a)(az-1)} + \lim_{z \rightarrow a} \frac{az^2 - 2z + a}{z(az-1)} \right] \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5

$$\oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz$$

Perceba que a função

$$f(z) = \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}$$

possui um **polo simples** em $z_0 = 1$ e um outro polo que não se sabe a classificação em $z_1 = 0$. Pelo **Teorema dos Resíduos**, sabe-se que

$$\oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz = 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)]$$

Como z_0 é **polo simples**, tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \\
 &= \sinh 1
 \end{aligned}$$

Para calcular o resíduo em z_1 será necessário encontrar a **série de Laurent** para a função f em torno de z_1 . Para isto, usando o desenvolvimento em **série de Taylor**, sabe-se que

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots \Rightarrow$$

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} + \frac{z^{-7}}{7!} + \frac{z^{-9}}{9!} + \dots$$

Além disso

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\
 &= -\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots\right) \\
 &= -1 - z - z^2 - z^3 - z^4 - \dots
 \end{aligned}$$

para $|z| < 1$. Por fim, a **série de Laurent** que deseja-se encontrar, é dada por

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z-1} \\
 &= \left(z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} + \dots\right) (-1 - z - z^2 - \dots)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_0) &= \text{coeficiente do termo } z^{-1} \\
 &= -1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots \\
 &= -\sinh 1
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\
 &= 2\pi i [\sinh 1 - \sinh 1] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■