Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^{o}. Edson

2 º Semestre

Gabarito 2ª Prova **2022**
Data: Sexta-feira, 14 de Julho de 2023 **Turma E5**

Exercício 1 *Considere*

$$p(z) = z^2$$
$$q(z) = \bar{z}^2 + 2\bar{z}$$

e observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z} \\ &= p(z) + q(z) \end{aligned}$$

Como p é polinomial e portanto, derivável em todo $\mathbb{C}$*, seque-se que f é derivável onde q também é. Supondo*

$$z = x + \mathbf{i}y,$$

tem-se

$$\begin{aligned} q(z) &= (x - \mathbf{i}y)^2 + 2(x - \mathbf{i}y) \\ &= x^2 + 2x - y^2 - 2\,(xy + y)\,\mathbf{i} \\ &= u(x,y) + v(x,y)\mathbf{i} \end{aligned}$$

sendo

$$u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$$
$$v(x,y) = -2\,(xy + y)$$

Perceba que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2x - 2$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, as ***Equações de Cauchy-Rieman*** *são válidas apenas em* $z = -1$*, único valor de z onde f é derivável. Além disso, segue-se que*

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z + q'(z) \\ &= 2z + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} \\ &= 2z + (2x + 2) - 2y\mathbf{i} \end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$p(z) = z^2$$
$$q(z) = (x - 1)^2 + \mathbf{i}(y - 1)^2$$

e observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + (x - 1)^2 + \mathbf{i}(y - 1)^2 \\ &= p(z) + q(z) \end{aligned}$$

Como p é polinomial e portanto, derivável em todo $\mathbb{C}$*, seque-se que f é derivável onde q também é. Supondo*

$$q(z) = u(x,y) + v(x,y)\mathbf{i}$$

em que

$$u(x,y) = (x - 1)^2$$
$$v(x,y) = (y - 1)^2$$

a). Segue-se que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(y - 1)$$

e, usando as ***Equações de Cauchy-Rieman****, tem-se*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ou seja, f é derivável para todo $z = x + x\mathbf{i}$, com $x \in \mathbb{R}$. Além disso, segue-se que

$$\begin{aligned} f'(z) &= p'(z) + q'(z) \\ &= 2z + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathbf{i} \\ &= 2z + 2(x-1) \end{aligned}$$

□

b). *Como f é derivável apenas sobre a reta $y = x$ e para ser analítica em um ponto $z \in \mathbb{C}$ é necessário a analiticidade numa vizinhança deste ponto, segue-se f é* ***não analítica*** *em todo $\mathbb{C}$.* □

c). *De acordo, o que foi mostrado no item (a), segue-se que*

$$f'(1+\mathbf{i}) = 2(1+\mathbf{i})$$

■

Exercício 3 *Inicialmente observe que*

$$\left(1 + e^{\theta\mathbf{i}}\right)\left(1 - e^{\theta\mathbf{i}}\right) = 1 - e^{2\theta\mathbf{i}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\pi} \frac{1+e^{\mathbf{i}\theta}}{1-e^{2\mathbf{i}\theta}} &= \lim_{\theta\to\pi} \frac{1+e^{\mathbf{i}\theta}}{\left(1+e^{\theta\mathbf{i}}\right)\left(1-e^{\theta\mathbf{i}}\right)} \\ &= \lim_{\theta\to\pi} \frac{1}{1-e^{\theta\mathbf{i}}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

(Outro Modo)*: Observe que*

$$1 + e^{\mathbf{i}\pi} = 0$$

$$1 - e^{2\mathbf{i}\pi} = 0$$

e, usando a ***Regra de L'Hôpital****, tem-se*

$$\begin{aligned} \lim_{\theta\to\pi} \frac{1+e^{\mathbf{i}\theta}}{1-e^{2\mathbf{i}\theta}} &= \lim_{\theta\to\pi} \frac{\mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}}{-2\mathbf{i}e^{2\mathbf{i}\theta}} \\ &= \lim_{\theta\to\pi} \frac{1}{-2e^{\mathbf{i}\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Considerando*

$$w = \operatorname{Ln} z$$

a equação em questão torná-se

$$w^2 + w + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$w_1 = \frac{-1+\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1-\mathbf{i}\sqrt{3}}{2}$$

Para $w = w_1$, tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z = w_1 &\Rightarrow \\ z &= e^{w_1} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} e^{\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

e para $w = w_2$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln} z = w_2 &\Rightarrow \\ z &= e^{w_2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} e^{-\mathbf{i}\frac{\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathbf{i}\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Pela definição, tem-se que*

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{\mathbf{i}} &= e^{\mathbf{i}\ln\mathbf{i}} \\ &= e^{\mathbf{i}(\ln|\mathbf{i}| + \mathbf{i}\arg\mathbf{i})} \\ &= e^{\mathbf{i}\left[\mathbf{i}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right]} \\ &= e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 6 (Desafio) *Considere*

$$f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}\, v(x,y)$$

sendo

$$u(x,y) = (x-y)\left(x^2+4xy+y^2\right)$$

*Supondo que $f(z)$ é **analítica** para $z \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$. Segue-se das **Equações de Cauchy-Euler**, que*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -3x^2+6xy+3y^2 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 3x^2+6xy-3y^2 \end{cases}$$

Integrando a primeira equação deste sistema em relação a x, obtém-se

$$v(x,y) = -x^3+3x^2y+3y^2x+k(y) \tag{1}$$

Derivando função em (1) em relação a y, tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2+6xy+k'(y) \tag{2}$$

Comparando (2) com a segunda equação do sistema, conclui-se que

$$k'(y) = -3y^2$$

e disto, segue-se

$$k(y) = -y^3+c,\ c \in \mathbb{R}$$

Voltando à eq. (1), tem-se por fim,

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -x^3+3x^2y+3y^2x-y^3+c \\ &= (x+y)\left(-x^2+4xy-y^2\right)+c \end{aligned}$$

$\blacksquare$