Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2020**
Data: Quarta-feira, 03 de Novembro de 2021 **Turma E5**

Exercício 1 *De acordo com a série dada tem-se que*

$$a_n = (z+5\mathbf{i})^{2n}(n+1)^2$$

e

$$a_{n+1} = (z+5\mathbf{i})^{2n+2}(n+2)^2$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(z+5\mathbf{i})^{2n+2}(n+2)^2}{(z+5\mathbf{i})^{2n}(n+1)^2}\right| \\ &= \left|(z+5\mathbf{i})^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right| \\ &= |z+5\mathbf{i}|^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\end{aligned}$$

De acordo com o ***teste da razão****, para que a seríe seja convergente em z, é necessário que*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}|z+5\mathbf{i}|^2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z+5\mathbf{i}|^2\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z+5\mathbf{i}|^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z+5\mathbf{i}| < 1$$

Ou seja, a série converje para quaisquer valores de z dentro do círculo de raio 1 e centro em $z_0 = -5\mathbf{i}$. ■

Exercício 2 *Observe que*

$$e^z = \frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} z &= \ln\left(\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln\left|\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right| + \mathbf{i}\arg\left(\frac{1+\mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln 1 + \mathbf{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 3 *Considere* $z = x + \mathbf{i}y$ *e observe que*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{|z|+z}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x+\mathbf{i}y}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} + \mathbf{i}\frac{y}{2}\end{aligned}$$

Ou seja, a função f possui partes reais e imaginária

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}+x}{2} \\ v(x,y) &= \frac{y}{2}\end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= \frac{x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{2} \\ u_y(x,y) &= \frac{y}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\ v_x(x,y) &= 0 \\ v_y(x,y) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

As equações de ***Cauchy-Riemann*** *serão satisfeitas se*

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y) \\ u_y(x,y) &= -v_x(x,y\end{aligned}$$

Ou seja, quando

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Segue-se, dos ***critérios de diferenciabilidade****, que f é diferenciável apenas em* $z = 0$ *e é* ***não analítica*** *em todo o* $\mathbb{C}$. ■

Exercício 4 *Observe que a função*

$$f(z) = \frac{e^{\mathbf{i}z}}{(z^2+1)^2}$$

posssui dois polos de ordem 2 em $z = \mathbf{i}$ e $z = -\mathbf{i}$. Considere portanto as curvas

$$\gamma_1 : z(t) = \mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_2 : z(t) = -\mathbf{i} + \frac{1}{2}e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$$

*Usando a 2^a **Fórmula Integral de Cauchy**, segue-se que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^{\mathbf{i}z}dz}{(z^2+1)^2} &= \int_{\gamma_1} \frac{e^{\mathbf{i}z}dz}{(z^2+1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{\mathbf{i}z}dz}{(z^2+1)^2} \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{\mathbf{i}z}}{(z+\mathbf{i})^2}dz}{(z-\mathbf{i})^2} + \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{\mathbf{i}z}}{(z-\mathbf{i})^2}dz}{(z+\mathbf{i})^2} \\
&= 2\pi\mathbf{i}\left[\frac{e^{\mathbf{i}z}}{(z+\mathbf{i})^2}\right]'_{z=\mathbf{i}} + 2\pi\mathbf{i}\left[\frac{e^{\mathbf{i}z}}{(z-\mathbf{i})^2}\right]'_{z=-\mathbf{i}} \\
&= \frac{\pi}{e}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere a curva γ, dada por*

$$z = e^{\mathbf{i}\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
dz &= \mathbf{i}e^{\mathbf{i}\theta}d\theta \\
&= \mathbf{i}z\,d\theta
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2} \\
&= \frac{z + z^{-1}}{2} \\
&= \frac{z^2+1}{2z}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{8d\theta}{5 + 2\cos\theta} = \int_\gamma \frac{-8\mathbf{i}dz}{z^2+5z+1}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{-8\mathbf{i}}{z^2+5z+1}$$

*possui um **polo de ordem simples** em*

$$z_0 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$$

$$z_1 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$$

$$z_0 - z_1 = \sqrt{21}$$

*e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{-8\mathbf{i}dz}{z^2+5z+1} &= 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f, z_0) \\
&= 2\pi\mathbf{i}\lim_{z\to z_0}\left[z - z_0\frac{-8\mathbf{i}}{(z-z_0)(z-z_1)}\right] \\
&= 2\pi\mathbf{i}\,\frac{-8\mathbf{i}}{z_0 - z_1} \\
&= \frac{16\pi}{\sqrt{21}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \frac{8d\theta}{5+2\cos\theta} = \frac{16\pi}{\sqrt{21}}$$

■