Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2020**
Data: Sexta-feira, 29 de Outubro de 2021 **Turma E5**

Exercício 1 *De acordo com a série dada tem-se que*

$$a_n = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\frac{(2n)!}{(-1)^n z^{2n}}\right| \\ &= \left|\frac{(-1)z^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| \\ &= \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

Para que a seríe seja convergente em z, é necessário que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} < 1 \Rightarrow$$

$$0 < 1$$

Ou seja, a série converje para quaisquer valores de z.Em outras palavras, o disco de convergência é

$$|z| < \infty$$

Outro Modo:.

Observe que

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Ou seja, a série dada é, na verdade a expansão da função $\cos z$ *como série de Taylor em torno de* $z = 0$ *e como a função* $\cos z$ *é analítica para todo* $z \in \mathbb{C}$*, segue-se que a série dada é convergente para todo* $z \in \mathbb{C}$*.* ■

Exercício 2 *Observe que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(z + z^{-1}\right) dz &= \int_\gamma \left(z + \frac{1}{z}\right) dz \\ &= \int_\gamma \frac{z^2+1}{z} dz\end{aligned}$$

e que a função

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z}$$

não é analítica apenas em $z = 0$*. Como este ponto está dentro do círculo unitário descrito por* γ*, segue-se da* ***primeira fórmula integral de Cauchy*** *que*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(z + z^{-1}\right) dz &= 2\pi\mathbf{i}\left(z^2+1\right)\Big|_{z=0} \\ &= 2\pi\mathbf{i}\end{aligned}$$

Outro Modo*:*

Uma parametrização possível para o círculo unitário com centro na origem e percorrido no sentido antihorário é dada por

$$z(t) = e^{\mathbf{i}t},\ 0 \le t \le 2\pi$$

e disto segue-se que

$$dz = \mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}dt$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_\gamma \left(z + z^{-1}\right) dz &= \int_0^{2\pi}\left(e^{\mathbf{i}t} + e^{-\mathbf{i}t}\right)\mathbf{i}e^{\mathbf{i}t}dt \\ &= \int_0^{2\pi}\mathbf{i}\left(e^{2\mathbf{i}t}+1\right)dt \\ &= \mathbf{i}\left(\frac{e^{2\mathbf{i}t}}{2\mathbf{i}} + t\right)\Big|_0^{2\pi} \\ &= \mathbf{i}\left[\left(\frac{e^{4\pi\mathbf{i}}}{2\mathbf{i}} + 2\pi\right) - \left(\frac{1}{2\mathbf{i}}\right)\right] \\ &= \mathbf{i}\left[\frac{1}{2\mathbf{i}} + 2\pi - \frac{1}{2\mathbf{i}}\right] \\ &= 2\pi\mathbf{i}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Observe que a função*

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$$

possui quatro polos simples em

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= -1 \\ z_2 &= \mathbf{i} \\ z_3 &= -\mathbf{i} \end{aligned}$$

e todos estão dentro da curva γ de equação $|z| = 2$. Pelo ***teorema dos Resíduos****, segue-se que*

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)dz &= \operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1) + \\ &\quad + \operatorname{Res}(f, z_2) + \operatorname{Res}(f, z_3) \\ &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) + \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) + \\ &\quad + \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) + \lim_{z \to z_3} (z - z_3) f(z) \\ &= \frac{z_0}{4z_0^3} + \frac{z_1}{4z_1^3} + \frac{z_2}{4z_2^3} + \frac{z_3}{4z_3^3} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(1 + 1 - 1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Perceba que*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z^2 - 4z + 4)} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z-2)^2} \end{aligned}$$

Ou seja, a função f possui um polo ***não isolado*** *em $z = 0$, uma vez que a função $z^{\frac{1}{2}}$ não está definida na parte negativa do eixo real (pois considera-se o argumento principal no intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$). Além disso, f possui um* ***polo isolado de ordem 2*** *em $z = 2$.*

Portanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2) &= \lim_{z \to 2}\left[\frac{d}{dz}\left((z-2)^2 f(z)\right)\right] \\ &= \lim_{z \to 2}\left[\frac{d}{dz}\left((z-2)^2 \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z-2)^2}\right)\right] \\ &= \lim_{z \to 2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right)\right] \\ &= \lim_{z \to 2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}\right] \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere o caminho C, dado por*

$$z = e^{\mathbf{i}\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} dz &= \mathbf{i} e^{\mathbf{i}\theta} d\theta \\ &= \mathbf{i} z\, d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2\mathbf{i}} \\ &= \frac{z^2 - 1}{2\mathbf{i}z} \Rightarrow \\ \operatorname{sen}^4\theta &= \left(\frac{z^2 - 1}{2\mathbf{i}z}\right)^4 \\ &= \frac{(z^2 - 1)^4}{16z^4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^4\theta\, d\theta &= \int_C \frac{(z^2-1)^4}{16z^4} \frac{dz}{\mathbf{i}z} \\ &= \int_C \frac{(z^2-1)^4}{16\mathbf{i}z^5} dz \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{(z^2-1)^4}{16\mathbf{i}z^5}$$

*possui um **polo de ordem 5** em $z = 0$ e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que*

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16\mathbf{i}z^5}dz &= 2\pi\mathbf{i}\,\mathrm{Res}(f,0) \\
&= 2\pi\mathbf{i}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}z^5 f(z)\right] \\
&= 2\pi\mathbf{i}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{24}\frac{d^4}{dz^4}z^5\frac{\left(z^2-1\right)^4}{16\mathbf{i}z^5}\right] \\
&= 2\pi\mathbf{i}\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{24\cdot 16\mathbf{i}}\frac{d^4}{dz^4}\left(z^2-1\right)^4\right] \\
&= \frac{2\pi\mathbf{i}}{24\cdot 16\mathbf{i}}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^4}{dz^4}\left(z^2-1\right)^4\right] \\
&= \frac{\pi}{12\cdot 16}\lim_{z\to 0}\left[1680z^4-1440z^2+144\right] \\
&= \frac{\pi}{12\cdot 16}144 \\
&= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{sen}^4\,\theta\,d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

■