Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2ª Prova **2020**
Data: Quarta-feira, 27 de Outubro de 2021 **Turma E5**

Exercício 1

a). *Observe que as funções parte real e parte imgináría de f são, respectivamente*

$$u(x,u) = x\,y^2$$
$$v(x,y) = x^2 y$$

Donde segue-se que

$$u_x = y^2$$
$$u_y = 2xy$$

$$v_x = 2xy$$
$$v_y = x^2$$

*Para que, as **equações de Cauchy-Riemann** sejam válidas é necessário que*

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$z = 0$$

$\square$

b). *Como as funções u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são **contínuas** para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ mas, as **equações de Cauchy-Riemann** se verificam apenas em $z = 0$, segue-se que f é **diferenciável** apenas em $z = 0$.* $\square$

c). *Para que f seja **análitica** num dado $z \in \mathbb{C}$ é necessário que seja diferenciável neste z e também numa vizinhança qualquer de z. Como só há um ponto diferenciável para a função f, segue-se que f é **não analítica** em todo $\mathbb{C}$.* $\blacksquare$

Exercício 2 *Suponha que*

$$f(z) = u(x,y) + \mathbf{i}\,v(x,y)$$

com,

$$u(x,y) = y^3 - 3x^2y$$

*Para que f seja **analítica** em $\mathbb{C}$, é necessário que as **equação de Cauchy-Riemann** sejam válidas em $\mathbb{C}$, ou seja*

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = -3y^2 + 3x^2 \\ v_y = -6xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + k, k \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow$$

Como, deseja-se que

$$f(\mathbf{i}) = 1 + \mathbf{i},$$

ou seja

$$u(0,1) + \mathbf{i}v(0,1) = 1 + \mathbf{i} \quad \Rightarrow$$
$$v(0,1) = 1 \quad \Rightarrow$$
$$k = 1$$

Portanto,

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + 1$$

e

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + \mathbf{i}\left(-3xy^2 + x^3 + 1\right)$$

$\blacksquare$

Exercício 3 *Observe que*

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ln}\left(z^2 - 1\right) &= \tfrac{\mathbf{i}\pi}{2} && \Rightarrow \\
z^2 - 1 &= e^{\frac{\mathbf{i}\pi}{2}} && \Rightarrow \\
z^2 - 1 &= \cos\tfrac{\pi}{2} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{2} && \Rightarrow \\
z^2 - 1 &= \mathbf{i} && \Rightarrow \\
z^2 &= 1 + \mathbf{i} && \Rightarrow \\
z &= \sqrt{1 + \mathbf{i}} && \Rightarrow \\
z &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\tfrac{\pi}{4} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\tfrac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{8}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + \mathbf{i}\,\mathrm{sen}\frac{9\pi}{8}\right)$$

■

Exercício 4 *Para a resolução deste problema é necessário lembrar que*

$$\cosh z = \cos \mathbf{i}z$$
$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\cos z = \cosh z \quad &\Rightarrow \\
\cos z = \cos \mathbf{i}z \quad &\Rightarrow \\
z = \mathbf{i}z + 2k\pi \quad &\Rightarrow \\
z - \mathbf{i}z = 2k\pi \quad &\Rightarrow \\
z\,(1 - \mathbf{i}) = 2k\pi \quad &\Rightarrow \\
z = \frac{2k\pi}{1 - \mathbf{i}} \quad &\Rightarrow \\
z = \frac{2k\pi}{1 - \mathbf{i}}\frac{1 + \mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}} \quad &\Rightarrow \\
z = \frac{2k\pi\,(1 + \mathbf{i})}{2} \quad &\Rightarrow \\
z = k\pi\,(1 + \mathbf{i})
\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$*.* ■

Exercício 5 *Pode-se expressar*

$$f(z) = p(z) + q(z),$$

sendo

$$p(z) = -5\mathbf{i}z^2$$
$$q(z) = \frac{2 + \mathbf{i}}{z^2}$$

Observe que p *é uma função* ***polinomial*** *e portanto* ***analítica*** *em todo o* $\mathbb{C}$*. A função* q*, por sua vez é* ***racional*** *e* ***analítica*** *em todo* $\mathbb{C}$ *exceto em* $z = 0$*. Segue-se disto, que a função* f *será analítica no conjunto que corresponde à* ***interseção entre os domínios de analiticidade*** *de* p *e* q*, ou seja,* $\mathbb{C} - \{0\}$*.* ■