Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 1ª Prova **2020**
Data: Quinta-feira, 14 de Outubro de 2021 **Turma E5**

Exercício 1 *Considere*

$$w = \frac{|z| - \mathbf{i}z}{|z| + \mathbf{i}z}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\overline{w} &= \overline{\frac{|z| - \mathbf{i}z}{|z| + \mathbf{i}z}} \\
&= \frac{\overline{|z|} - \overline{\mathbf{i}z}}{\overline{|z|} + \overline{\mathbf{i}z}} \\
&= \frac{|z| - \overline{\mathbf{i}}\,\overline{z}}{|z| + \overline{\mathbf{i}}\,\overline{z}} \\
&= \frac{|z| + \mathbf{i}\overline{z}}{|z| - \mathbf{i}\overline{z}}
\end{aligned}$$

Além disso, sabe-se que

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}(w) &= \frac{w + \bar{w}}{2} \\
&= \frac{\dfrac{|z| - \mathbf{i}z}{|z| + \mathbf{i}z} + \dfrac{|z| + \mathbf{i}\overline{z}}{|z| - \mathbf{i}\overline{z}}}{2} \\
&= \frac{(|z| - \mathbf{i}z)(|z| - \mathbf{i}\overline{z}) + (|z| + \mathbf{i}\overline{z})(|z| + \mathbf{i}z)}{2(|z| + \mathbf{i}z)(|z| - \mathbf{i}\overline{z})} \\
&= \frac{2|z|^2 - 2z\overline{z}}{2(|z| + \mathbf{i}z)(|z| - \mathbf{i}\overline{z})} \\
&= 0
\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Inicialmente, perceba queUsando as propriedades do módulo complexo, segue-se que*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{(\pi + \mathbf{i})^{100}}{(\pi - \mathbf{i})^{100}}\right| &= \frac{\left|(\pi + \mathbf{i})^{100}\right|}{\left|(\pi - \mathbf{i})^{100}\right|} \\
&= \frac{|\pi + \mathbf{i}|^{100}}{|\pi - \mathbf{i}|^{100}} \\
&= \frac{\left(|\pi + \mathbf{i}|^2\right)^{50}}{\left(|\pi - \mathbf{i}|^2\right)^{50}} \\
&= \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi^2 + 1}\right)^{50} \\
&= 1^{50} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Considere*

$$\begin{aligned}
w &= \frac{\mathbf{i} - 1}{\operatorname{tg}\theta + \mathbf{i}} \\
&= \frac{\mathbf{i} - 1}{\operatorname{tg}\theta + \mathbf{i}} \frac{\operatorname{tg}\theta - \mathbf{i}}{\operatorname{tg}\theta - \mathbf{i}} \\
&= \frac{\mathbf{i}\operatorname{tg}\theta + 1 - \operatorname{tg}\theta + \mathbf{i}}{\operatorname{tg}^2\theta + 1} \\
&= \frac{(1 - \operatorname{tg}\theta) + \mathbf{i}\,(1 + \operatorname{tg}\theta)}{\operatorname{tg}^2\theta + 1} \\
&= \frac{(1 - \operatorname{tg}\theta) + \mathbf{i}\,(1 + \operatorname{tg}\theta)}{\sec^2\theta}
\end{aligned}$$

Para que w esteja no primeiro quadrante do plano de ***Argand-Gauss****, é necessário que*

$$\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w)$$

e

$$\operatorname{Re}(w) \geq 0$$

Observe que

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1 - \operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta}$$

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{1+\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w) &= \operatorname{Im}(w) && \Rightarrow \\ \frac{1-\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta} &= \frac{1+\operatorname{tg}\theta}{\sec^2\theta} && \Rightarrow \\ 2\operatorname{tg}\theta &= 0 && \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Obs.: *Houve um erro na digitação desta questão. No denominador, onde está escrito* $\operatorname{tg}\theta + \mathbf{1}$ *deveria estar* $\operatorname{tg}\theta + \mathbf{i}$. *Por este motivo,* ***todos*** *o alunos que participaram desta avaliação, receberam os* ***2.0 pontos*** *da questão.* ■

Exercício 4 *Considere $z = x + \mathbf{i}y$ e observe que*

$$\begin{aligned} z^2 + |z| &= 0 && \Rightarrow \\ (x+\mathbf{i}y)^2 + \sqrt{x^2+y^2} &= 0 && \Rightarrow \\ x^2 + 2xy\mathbf{i} - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} &= 0 && \Rightarrow \\ \left(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2}\right) + 2xy\mathbf{i} &= 0 && \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação deste sistema, segue-se que $x = 0$ ou $y = 0$.

Se $y = 0$, segue-se da primeira equação do sistema, que

$$\begin{aligned} x^2 + \sqrt{x^2} &= 0 && \Rightarrow \\ x^2 + |x| &= 0 && \Rightarrow \\ x^2 &= -|x| && \Rightarrow \\ x &= \nexists \end{aligned}$$

Se $x = 0$, segue-se da primeira equação do sistema, que

$$\begin{aligned} -y^2 + \sqrt{y^2} &= 0 && \Rightarrow \\ \sqrt{y^2} &= y^2 && \Rightarrow \\ y^2 &= y^4 && \Rightarrow \\ y^4 - y^2 &= 0 && \Rightarrow \\ y^2\left(y^2-1\right) &= 0 && \Rightarrow \\ y &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

Ou seja, $z = 0, z = \mathbf{i}$ ou $z = -\mathbf{i}$. ■

Exercício 5 *Observe que*

$$\mathbf{i}z^3 + 1 = (z+\mathbf{i})\left(\mathbf{i}z^2 - z + \mathbf{i}\right)$$

$$z^2 + 1 = (z+\mathbf{i})(z-\mathbf{i})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to-\mathbf{i}} \frac{\mathbf{i}z^3+1}{z^2+1} &= \lim_{z\to-\mathbf{i}} \frac{(z+\mathbf{i})\left(\mathbf{i}z^2+z-\mathbf{i}\right)}{(z+\mathbf{i})(z-\mathbf{i})} \\ &= \lim_{z\to-\mathbf{i}} \frac{\mathbf{i}z^2+z-\mathbf{i}}{z-\mathbf{i}} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

■