

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quarta-feira, 12 de Fevereiro

2019
Turma E5

Problema 1 *Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os números complexos que deseja-se encontrar. Como um deve ser o conjugado do outro, conforme diz o enunciado do problema, considere*

$$\mathbf{u} = a + bi$$

$$\mathbf{v} = a - bi$$

Além disso, deve-se ter

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = 1 \Rightarrow$$

$$a + bi + a - bi = 1 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}$$

e

$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = 2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Problema 2 *Observe inicialmente que*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen} z \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos z \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen} z - \cos z) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z - \cos z &= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Logo, a equação dada

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= 3 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z - \frac{\pi}{4} &= \arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{\pi}{4} + \arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\arcsen z = -i \ln \left[iz + \sqrt{1 - z^2} \right]$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} z &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \left[\log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 3 *Deseja-se avaliar a analiticidade da função*

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

Para isto considere as funções

$$g(z) = z - i$$

e

$$h(z) = \bar{z} - i$$

Observe que g é uma função polinomial e, portanto analítica em todo $\mathbb{C}$. Por outro lado, a função h pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h(z) &= x - iy - i \\ &= x - i(y + 1), \end{aligned}$$

considerando-se $z = x + iy$. Assim, suas partes real e imaginária são

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y - 1 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, as equações de **Cauchy-Riemann** não são válidas para todo z . Disto conclui-se que h não é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Perceba que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e suponha que exista $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . Assim, como g é também analítica em z , segue que g/f também é analítica em z . Mas

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{\frac{g(z)}{h(z)}} = g(z) \frac{h(z)}{g(z)} = h(z)$$

o que é uma contradição, visto que h é não analítica em todo $\mathbb{C}$. Logo, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . ■

Problema 4 Considere C_2 sendo a curva correspondente ao percurso de **uma** volta no

círculo $|z| = 4$ no sentido **antihorário**. Uma parametrização possível para C_2 é dada por

$$z = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como C é a curva que corresponde a duas voltas no círculo $|z| = 4$ no sentido antihorário, segue-se que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz = -2 \int_{C_2} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz$$

Além disso, a função

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$$

possui duas singularidades em $z = -2$ e $z = 1$ e ambas estão dentro do círculo $|z| = 4$. Decompondo o círculo C_2 nos semi-círculos C_{2e} (semi-círculo à esquerda) e C_{2d} (semi-círculo à direita) orientados também no sentido antihorário, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} + \\ &+ \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} \end{aligned}$$

e, usando a primeira fórmula de integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)}{z+2} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z-1}\right) \Big|_{z=-2} \\ &= \frac{4\pi i}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2d}} \frac{\left(\frac{z}{z+2}\right)}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z+2}\right) \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi i}{3} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \frac{4\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_C \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= -2(2\pi i) \\ &= -4\pi i\end{aligned}$$

■

Problema 5 Sendo a série dada por

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n,$$

observe que seu termo geral é

$$u_n = \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n$$

e

$$u_{n+1} = \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1} \frac{e^n}{\sinh n (z+1)^n} \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} (z+1) \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{2e} \frac{2}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n - e^{-n-2}}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n (1 - e^{-2n-2})}{e^n (1 - e^{-2n})} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1|\end{aligned}$$

Usando o **teste da razão**, tem-se que esta série será convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - \frac{1}{e^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{e^{2n}}} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| < 1$$

Portanto, a série converge absolutamente no disco de centro em $z = -1$ e raio $R = 1$. ■