Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 3ª Prova — **2019**
Data: Quinta-feira, 6 de Fevereiro — **Turma E5**

Exercício 1 *Observe que*

$$\int_\gamma \left(z+z^{-1}\right)dz = \int_\gamma \left(z+\frac{1}{z}\right)dz$$
$$= \int_\gamma \frac{z^2+1}{z}dz$$

e que a função

$$f(z)=\frac{z^2+1}{z}$$

*não é analítica apenas em $z=0$. Como este ponto está dentro do círculo unitário descrito por γ, segue-se da **primeira fórmula integral de Cauchy** que*

$$\int_\gamma \left(z+z^{-1}\right)dz = 2\pi i\left(z^2+1\right)\Big|_{z=0}$$
$$=2\pi i$$

***Outro Modo**:*

Uma parametrização possível para o círculo unitário com centro na origem e percorrido no sentido antihorário é dada por

$$z(t)=e^{it},\ 0\le t\le 2\pi$$

e disto segue-se que

$$dz = ie^{it}dt$$

Portanto

$$\int_\gamma \left(z+z^{-1}\right)dz = \int_0^{2\pi}\left(e^{it}+e^{-it}\right)ie^{it}dt$$
$$=\int_0^{2\pi} i\left(e^{2it}+1\right)dt$$
$$= i\left(\frac{e^{2it}}{2i}+t\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$
$$= i\left[\left(\frac{e^{4\pi i}}{2i}+2\pi\right)-\left(\frac{1}{2i}\right)\right]$$
$$= i\left[\frac{1}{2i}+2\pi-\frac{1}{2i}\right]$$
$$=2\pi i$$

■

Exercício 2 *Observe que $z_0=1+i$ e $z_1=0$ são polos de ordem 1 e 2, respectivamente, da função*

$$f(z)=\frac{\cosh^2 z}{(z-1-i)z^2}$$

*e ambos estão localizados no interior da curva $\gamma:|z|=3$. Considere γ_0 sendo uma curva fechadas tendo z_0 em seu interior e γ_1 outra curva fechada tendo z_1 em seu interior. Segue-se do **teorema da deformação de contornos**, que*

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_0} f(z)dz + \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

*e, usando a **1ª fórmula integral de Cauchy**, tem-se que*

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_0}\frac{\left(\frac{\cosh^2 z}{z^2}\right)}{(z-1-i)}dz$$
$$=2\pi i\left(\frac{\cosh^2 z}{z^2}\right)\Bigg|_{z=z_0}$$
$$=2\pi i\left(\frac{\cosh^2 z}{z^2}\right)\Bigg|_{z=1+i}$$
$$=2\pi i\frac{\cosh^2(1+i)}{(1+i)^2}$$
$$=\pi\cosh^2(1+i)$$

*Usando a **2ª fórmula integral de Cauchy**, tem-se que*

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1}\frac{\left(\frac{\cosh^2 z}{z-1-i}\right)}{z^2}dz$$
$$=2\pi i\left(\frac{\cosh^2 z}{z-1-i}\right)'\Bigg|_{z=z_1}$$
$$=2\pi i\,\frac{2\cosh z\,\mathrm{senh}\, z\,(z-1-i)-\cosh^2 z}{(z-1-i)^2}\Bigg|_{z=0}$$
$$=-\pi$$

Portanto

$$\int_\gamma \frac{\cosh^2 z}{(z-1-i)z^2}dz = \pi\cosh^2(1+i) - \pi$$
$$= \pi\left[\cosh^2(1+i) - 1\right]$$
$$= \pi\,\mathrm{senh}^2\,(1+i)$$

■

Exercício 3 *De acordo com a série dada tem-se que*

$$a_n = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}$$

Disto segue-se que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}\frac{(2n)!}{(-1)^n z^{2n}}\right|$$
$$= \left|\frac{(-1)z^2}{(2n+2)(2n+1)}\right|$$
$$= \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

Para que a seríe seja convergente em z, é necessário que

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} < 1 \Rightarrow$$

$$0 < 1$$

Ou seja, a série converje para quaisquer valores de z.Em outras palavras, o disco de convergência é

$$|z| < \infty$$

Outro Modo:.

Observe que

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Ou seja, a série dada é, na verdade a expansão da função $\cos z$ como série de Taylor em torno de $z=0$ e como a função $\cos z$ é analítica para todo $z\in\mathbb{C}$, segue-se que a série dada é convergente para todo $z\in\mathbb{C}$. ■

Exercício 4 *Observe que*

$$f(z) = \frac{4z-1}{z^4-1}$$
$$= \frac{4z-1}{-(1-z^4)}$$
$$= \frac{1-4z}{1-z^4}$$
$$= (1-4z)\frac{1}{1-z^4}$$

Usando a série geométrica, tem-se que

$$\frac{1}{1-z^4} = 1 + z^4 + z^8 + z^{12} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n}$$

para $\left|z^4\right| < 1$, ou seja, $|z| < 1$. Portanto, segue-se que

$$f(z) = (1-4z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} - 4z\sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 4z^{4n+1}$$
$$= 1 - 4z + z^4 - 4z^5 + z^8 - 4z^9 + \cdots$$

para $|z| < 1$. ■

Exercício 5 *Observe que*

$$\int_\gamma \mathrm{tg}\,(\pi z)\,dz = \int_\gamma \frac{\mathrm{sen}\,(\pi z)}{\cos(\pi z)}dz$$

e

$$\cos(\pi z) = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$\pi z = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow$$
$$z = \frac{1}{2} + k$$

com $k\in\mathbb{Z}$. Portanto, a função

$$f(z) = \mathrm{tg}\,(\pi z)$$

possui 4 poos simples dentro do cícurlo $\gamma : |z| = 2$.

São eles

$$z_0 = -\frac{3}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}$$

$$z_3 = \frac{3}{2}$$

Calculando os resíduos em cada um desses polos tem-se

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \\
&= \lim_{z \to -\frac{3}{2}} \left(z + \frac{3}{2}\right) \mathrm{tg}\,(\pi z) \\
&= \lim_{z \to -\frac{3}{2}} \frac{\left(z + \frac{3}{2}\right) \mathrm{sen}\,(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to -\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{sen}\,(\pi z) + \pi \left(z + \frac{3}{2}\right) \cos(\pi z)}{-\pi\, \mathrm{sen}\,(\pi z)} \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \to z_1} (z - z_1) f(z) \\
&= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2}\right) \mathrm{tg}\,(\pi z) \\
&= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{\left(z + \frac{1}{2}\right) \mathrm{sen}\,(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to -\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{sen}\,(\pi z) + \pi \left(z + \frac{1}{2}\right) \cos(\pi z)}{-\pi\, \mathrm{sen}\,(\pi z)} \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \to z_2} (z - z_2) f(z) \\
&= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \mathrm{tg}\,(\pi z) \\
&= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\left(z - \frac{1}{2}\right) \mathrm{sen}\,(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to \frac{1}{2}} \frac{\mathrm{sen}\,(\pi z) + \pi \left(z - \frac{1}{2}\right) \cos(\pi z)}{-\pi\, \mathrm{sen}\,(\pi z)} \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, z_3) &= \lim_{z \to z3} (z - z_3) f(z) \\
&= \lim_{z \to \frac{3}{2}} \left(z - \frac{3}{2}\right) \mathrm{tg}\,(\pi z) \\
&= \lim_{z \to \frac{3}{2}} \frac{\left(z - \frac{3}{2}\right) \mathrm{sen}\,(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\
&= \lim_{z \to \frac{3}{2}} \frac{\mathrm{sen}\,(\pi z) + \pi \left(z - \frac{3}{2}\right) \cos(\pi z)}{-\pi\, \mathrm{sen}\,(\pi z)} \\
&= -\frac{1}{\pi}
\end{aligned}$$

Assim, pelo ***Teorema dos Resíduos****, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \mathrm{tg}\ (\pi z)\, dz &= 2\pi i \sum_{i=0}^{3} \mathrm{Res}(f, z_i) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{4}{\pi}\right) \\
&= -8i
\end{aligned}$$

■