Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2ª Prova **2019**
Data: Sexta-feira, 20 de Dezembro **Turma E5**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$e^z = 2i \Rightarrow$$
$$z = \ln 2i$$
$$= \ln |2i| + \arg(2i)$$
$$= \ln 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

□

b). *Considerando*

$$w = \operatorname{Ln} z,$$

segue-se que

$$w^2 + w + 1 = 0$$

Ou seja,

$$w = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto

$$\operatorname{Ln} z = w \Rightarrow$$
$$z = e^w$$
$$= e^{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$z = x + i\,y$$

e observe que

$$f(z) = z^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$
$$= (x+iy)^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$
$$= x^2 + 2xyi - y^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$
$$= \left[x^2 - y^2 + (x-1)^2\right] + \left[(y-1)^2 + 2xy\right] i$$

Ou seja, as partes real e imaginária de f são, respectivamente

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + (x-1)^2$$
$$v(x,y) = (y-1)^2 + 2xy$$

a). *Para que f seja derivável em z é necessário que a equações de* ***Cauchy-Riemann*** *sejam satisfeitas em z,*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} 2x + 2(x-1) = 2(y-1) + 2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Portanto, f é derivável para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = x + ix = x(1+i)$. □

b). *A derivada de f em z é dada por*

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= (4x-2) + 2y\,i$$

e disto segue-se que

$$f'(1+i) = 2 + 2i$$

■

Exercício 3 *É necessário inicialmente, determinar as partes real e imaginária da função f. Para isto, observe que*

$$f(z) = \operatorname{cotgh} z$$
$$= \frac{\cosh z}{\operatorname{senh} z}$$
$$= \frac{\frac{e^z + e^{-z}}{2}}{\frac{e^z - e^{-z}}{2}}$$
$$= \frac{e^z + e^{-z}}{2}\frac{2}{e^z - e^{-z}}$$
$$= \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Considerando $z = x + i\,y$ tem-se que

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= e^{x+iy} + e^{-x-iy} \\ &= e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy} \\ &= e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y) \\ &= \left(e^x + e^{-x}\right)\cos y + \left(e^x - e^{-x}\right) i \operatorname{sen} y \\ &= 2\cosh x \cos y + 2i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^z - e^{-z} &= e^{x+iy} - e^{-x-iy} \\ &= e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy} \\ &= e^x\,(\cos y + i \operatorname{sen} y) - e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y) \\ &= \left(e^x - e^{-x}\right)\cos y + \left(e^x + e^{-x}\right) i \operatorname{sen} y \\ &= 2\operatorname{senh} x \cos y + 2i \cosh x \operatorname{sen} y \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2\cosh x \cos y + 2i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y}{2\operatorname{senh} x \cos y + 2i \cosh x \operatorname{sen} y} \\ &= \frac{\cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y}{\operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y} \\ &= \frac{\operatorname{senh} x \cosh x - i \operatorname{sen} y \cos y}{\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y} \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Im}(f(z)) = \frac{\operatorname{sen} y \cos y}{\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y}$$

e, para que a função f seja puramente real é necessário que

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 0$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} y \cos y}{\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y} &= 0 \Rightarrow \\ \operatorname{sen} y \cos y &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} y = 0 \; ou \; \cos y = 0$$

Portanto,

$$y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Com isto, segue-se que $f(z)$ será puramente real se

$$z = x + ik\pi$$

ou

$$z = x + i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$ ■

Exercício 4 *Se a função f é analítica em z, segue-se que a equações de* ***Cauchy-Riemann*** *são válidas em z. Ou seja*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

O que implica em

$$\begin{cases} -6xy = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\[2ex] 3y^2 - 3x^2 = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y} = -6xy \end{cases}$$

Integrando a segunda equação deste sistema em relação a y, obtem-se

$$v(x,y) = -3xy^2 + k(x)$$

e derivando esta última expressão com relação a x, tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + k'(x)$$

Comparando esta derivada parcial com a mesma, presente no sistema inicial, conclui-se que

$$-3y^2 + k'(x) = 3x^2 - 3y^2$$

Ou seja,

$$k'(x) = 3x^2$$

Donde segue-se que

$$k(x) = x^3 + c,\ c \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -3xy^2 + k(x) \\ &= -3xy^2 + x^3 + c \end{aligned}$$

Como

$$f(i) = 1 + i \Rightarrow v(0,1) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Portanto

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + 1$$

e

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x,y) + i\,v(x,y) \\ &= \left(y^3 - 3x^2y\right) + i\left(x^3 - 3xy^2 + 1\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere*

$$z = x + iy$$

e observe que

$$\mathrm{Re}(z) = x$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &= z\,\mathrm{Re}(z) \\ &= (x+iy)x \\ &= x^2 + i\,xy \end{aligned}$$

e as partes real e imagnária de f são, respectivamente

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^2 \\ v(x,y) &= xy \end{aligned}$$

*Para que f seja analítica em z é necessário que as equações de **Cauchy-Riemann** sejam satisfeitas, ou seja*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = x \\ 0 = -y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ou seja, f é diferenciável apenas em $z = 0$, o que implica dizer que f é não analítica em todo $\mathbb{C}$ uma vez que para isso é necessária a diferenciabilidade no ponto e em sua vizinhança. ■