Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^{o}. Edson

2^{o} Semestre

Gabarito 1^{a} Prova **2019**
Data: Quinta-feira, 5 de Dezembro **Turma E5**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\left|\frac{(1+i)^6}{(2+3i)^2}\right| = \frac{|1+i|^6}{|2+3i|^2}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2}\right)^6}{\left(\sqrt{13}\right)^2}$$
$$= \frac{8}{13}$$

□

b). *Deseja-se calcular*

$$A = \left(\frac{4-4i}{2+2i}\right)^7 + \left(\frac{4-4i}{2-2i}\right)^7$$

Para isto, observe que

$$\frac{4-4i}{2+2i} = \frac{4-4i}{2+2i}\frac{2-2i}{2-2i}$$
$$= \frac{8-8i-8i-8}{8}$$
$$= \frac{-16i}{8}$$
$$= -2i$$

e

$$\frac{4-4i}{2-2i} = \frac{4-4i}{2-2i}\frac{2+2i}{2+2i}$$
$$= \frac{8+8i-8i+8}{8}$$
$$= \frac{16}{8}$$
$$= 2$$

Portanto

$$A = (-2i)^7 + 2^7$$
$$= 128 + 128i$$

■

Exercício 2 *Observe que*

$$\frac{2+2i}{k+i} = \frac{2+2i}{k+i}\frac{k-i}{k-i}$$
$$= \frac{2k-2i+2ki+2}{k^2+1}$$
$$= \frac{2k+2+(2k-2)i}{k^2+1}$$
$$= \frac{2k+2}{k^2+1} + \frac{2k-2}{k^2+1}i$$

Ou seja

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2+2i}{k+i}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$\frac{2k-2}{k^2+1} = 0 \Rightarrow$$
$$k = 1$$

■

Exercício 3 *Considere $z = a+bi$ e $w = c+di$ tais que*

$$zw = 2$$
$$z - w = i$$

Segue-se da segunda equação que

$$z = w + i$$

e substituindo na primeira equação tem-se

$$(w+i)w = 2$$

ou seja,

$$w^2 + iw - 2 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtem-se

$$w = \frac{-i \pm \sqrt{-1+8}}{2}$$

Ou seja

$$w = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$$
$$z = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ou

$$w = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = -\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i$$

■

Exercício 4 *Inicialmente observe que*

$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Considerando

$$a = \sqrt[3]{1+z}$$
$$b = \sqrt[3]{1-z}$$

e substituindo na expressão anterior, obtem-se

$$2z = \left(\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z}\right)\left(\sqrt[3]{(1+z)^2} + \right.$$
$$\left. + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}\right)$$

Ou seja

$$\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z} = \frac{2z}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}}$$

Portanto

$$\begin{aligned} B &= \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z}}{z} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} \frac{2z}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 *Considere*

$$w = z^3$$

e perceba que a equação dada pode ser reescrita como

$$w^2 + w + 1 = 0$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} w &= \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

Ou seja

$$w_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{w_1} \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2,$ *ou seja*

$$z_1 = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{14\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{14\pi}{9}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{w_2} \\ &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos\left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2,$ *ou seja*

$$z_4 = \cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{2\pi}{9}\right)$$

$$z_5 = \cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{4\pi}{9}\right)$$

$$z_3 = \cos\left(\frac{10\pi}{9}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{10\pi}{9}\right)$$

■