Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito Prova Final **2017**
Data: Sábado, 14 de Abril de 2018 **Turma E5**

Exercício 1 *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned}1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-i &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\end{aligned}$$

Assim,

$$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$$(1-i)^n = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}(1+i)^n+(1-i)^n &= \left(\sqrt{2}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}} + \left(\sqrt{2}\right)^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n \left(e^{i\frac{n\pi}{4}} + e^{-i\frac{n\pi}{4}}\right)\\ &= \left(\sqrt{2}\right)^n 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\\ &= 2\left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Sendo*

$$f(z) = xy^2 + ix^2y$$

tem-se que

$$u(x,y) = xy^2$$

$$v(x,y) = x^2y$$

são as partes real e imaginária de f, respectivamente.

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

Então, para que as equações de ***Cauchy-Riemann*** *estejam satisfeitas, é necessário que*

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned}y^2 &= x^2\\ 2xy &= -2xy\end{aligned}\right.$$

Resolvendo o sistema, obtem-se $(x,y)=(0,0)$ como única solução. Portanto,

a). *As equações de* ***Cauchy-Riemann*** *são satisfeitas apenas em $(0,0)$.* □

b). *Como as equações de* ***Cauchy-Riemann*** *são satisfeitas apenas em $(0,0)$, segue-se que este ponto é o único local onde a função pode ser diferenciável. Para confirmar isto, observe que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em $(0,0)$ e isto garante a diferenciabilidade de f em $(0,0)$. Ou seja $(0,0)$ é o único local onde f é diferenciável.* □

c). *Novamente, como $(0,0)$ é o único ponto onde f é diferenciável e esta é uma condição necessária para a analiticidade de f num ponto, seque-se que $(0,0)$ é o único candidato à analiticidade. Porém,também é necessário que exista uma vizinhança em torno deste ponto que também seja diferenciável. Como não existe tal vizinhança,segue-se que f é não analítica em todo o $\mathbb{C}$.* ■

Exercício 3 *Observe inicialmente que*

$$\begin{aligned}\mathrm{sen}\left(z-\frac{\pi}{4}\right) &= \mathrm{sen}\,z\cos\frac{\pi}{4} - \mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\cos z\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathrm{sen}\,z - \cos z\right)\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z - \cos z &= \frac{2}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

Logo, a equação dada

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= 3 \Leftrightarrow\\ \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}z - \frac{\pi}{4} &= \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow\\ z &= \frac{\pi}{4} + \operatorname{arcsen}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\operatorname{arcsen} z = -i\ln\left[iz + \sqrt{1-z^2}\right]$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}z &= \frac{\pi}{4} - i\ln\left[i\left(\frac{3}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{7}{2}}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{4} - i\ln\left[i\left(\frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)\right]\\ &= \frac{\pi}{4} - i\left[\log_e\left|\frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]\\ &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i\log_e\left|\frac{3\pm\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right|\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 4 *Observe inicialmente que*

$$x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$|z-1| = 1$$

uma vez que $z = x + iy$. *Além disso, os polos da função*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

são soluções da equação

$$1 + z^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z = \sqrt[4]{-1}$$

ou seja

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$z_1 = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$z_2 = e^{i\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$z_3 = e^{i\left(\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Destes, apenas z_0 *e* z_3 *encontram-se dentro do círculo* C *de equação* $|z-1| = 1$. *Logo, pelo* ***Teorema dos Resíduos***, *segue-se que*

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_3)\right]$$

Onde

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_0}\\ &= \frac{1}{4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^3}\\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_3) &= \left.\frac{1}{4z^3}\right|_{z=z_3}\\ &= \frac{1}{4\left(e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^3}\\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{21\pi}{4}}}\\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_C \frac{dz}{1+z^4} = 2\pi i\left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)$$

$$= \frac{2\pi i}{4}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\pi}}\right)$$

$$= \frac{\pi i}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4}}{-1}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

■

Exercício 5 *Para resolver a integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8}dx$$

é necessário calcular a integral

$$\int_C \frac{z^4}{1+z^8}dz$$

sendo C *é a borda do semi-círculo de raio* r *e centro na origem cuja parametrização pode ser dada por*

$$C = C_r \cup \gamma$$

com C *sendo*

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

e γ

$$z = t, -r \leq t \leq r$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{z^4}{1+z^8}$$

possui oito polos simples obtidos como soluções da equação

$$1 + z^8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$z = \sqrt[8]{-1}$$

ou seja,

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = e^{i(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{3\pi}{8}}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{8}}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{5\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{8}}$$

$$z_4 = e^{i(\frac{7\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{9\pi}{8}}$$

$$z_5 = e^{i(\frac{9\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{11\pi}{8}}$$

$$z_6 = e^{i(\frac{11\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{13\pi}{8}}$$

$$z_7 = e^{i(\frac{13\pi}{8}+\frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{15\pi}{8}}$$

Destas, apenas z_0, z_1, z_2 *e* z_3 *encontram-se dentro da curva* C*. Assim, pelo* ***Teorema dos Resíduos****, tem-se que*

$$\int_C \frac{z^4}{1+z^8}dz = 2\pi i\sum_{k=0}^{3}\mathrm{Res}(f, z_k)$$

com

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \left.\frac{z^4}{8z^7}\right|_{z=z_0}$$
$$= \frac{1}{8z_0^3}$$
$$= \frac{1}{8e^{i\frac{3\pi}{8}}}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_1) = \left.\frac{z^4}{8z^7}\right|_{z=z_1}$$
$$= \frac{1}{8z_1^3}$$
$$= \frac{1}{8e^{i\frac{9\pi}{8}}}$$

$$\mathrm{Res}(f, z_2) = \left.\frac{z^4}{8z^7}\right|_{z=z_2}$$
$$= \frac{1}{8z_2^3}$$
$$= \frac{1}{8e^{i\frac{15\pi}{8}}}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, z_3) &= \left.\frac{z^4}{8z^7}\right|_{z=z_3} \\
&= \frac{1}{8z_3^3} \\
&= \frac{1}{8e^{i\frac{21\pi}{8}}} \\
&= \frac{1}{8e^{i\frac{5\pi}{8}}}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{z^4}{1+z^8}dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^{3} \operatorname{Res}(f, z_k) \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{8e^{i\frac{3\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{9\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{15\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{5\pi}{8}}} \right) \\
&= \frac{2\pi i}{8} \left(e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{9\pi}{8}} + e^{-i\frac{15\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}} \right) \\
&= \frac{\pi i}{4} \left(2i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} - 2i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} \right) \\
&= \frac{-\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} - \operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} \right) \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \frac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} \right)
\end{aligned}$$

e disto, segue-se

$$\int_C \frac{z^4}{1+z^8}dz = \tfrac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\int_\gamma \frac{z^4}{1+z^8}dz + \int_{C_r} \frac{z^4}{1+z^8}dz = \tfrac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\int_{-r}^{r} \frac{t^4}{1+t^8}dt = \tfrac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{-r}^{r} \frac{t^4}{1+t^8}dt = \tfrac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{8} \right) \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{1+t^8}dt = \tfrac{\pi}{2} \left(\operatorname{sen} \tfrac{3\pi}{8} - \operatorname{sen} \tfrac{\pi}{8} \right)$$

■