Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2017**
Data: Sexta-feira, 06 de Abril de 2018 **Turma E5**

Exercício 1 *Sendo a série dada por*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{senh} n}{e^n} (z+1)^n ,$$

observe que seu termo geral é

$$u_n = \frac{\operatorname{senh} n}{e^n} (z+1)^n$$

e

$$u_{n+1} = \frac{\operatorname{senh}(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| &= \left|\frac{\operatorname{senh}(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1} \frac{e^n}{\operatorname{senh} n \, (z+1)^n}\right| \\
&= \left|\frac{\operatorname{senh}(n+1)}{e \operatorname{senh} n} (z+1)\right| \\
&= \left|\frac{\operatorname{senh}(n+1)}{e \operatorname{senh} n}\right| |z+1| \\
&= \left|\frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{2e} \frac{2}{e^n - e^{-n}}\right| |z+1| \\
&= \left|\frac{e^n - e^{-n-2}}{e^n - e^{-n}}\right| |z+1| \\
&= \left|\frac{e^n \left(1 - e^{-2n-2}\right)}{e^n \left(1 - e^{-2n}\right)}\right| |z+1| \\
&= \left|\frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}}\right| |z+1|
\end{aligned}$$

*Usando o **teste da razão**, tem-se que esta série será convergente quando*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}}\right| |z+1| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{1 - \frac{1}{e^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{e^{2n}}}\right| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| < 1$$

Portanto, a série converge absolutamente no disco de centro em $z = -1$ e raio $R = 1$. ■

Exercício 2 *Sabe-se da **série geométrica** que*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n
\end{aligned}$$

desde que $|z| < 1$. Além disto, usando a derivada, tem-se que

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z}\right) \\
&= \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}
\end{aligned}$$

Usando a derivada novamente, observe que

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right] = \frac{2}{(1-z)^3},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(1-z)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1}\right] \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}
\end{aligned}$$

desde que $|z| < 1$ (disco de convergência). ■

Exercício 3 *Perceba que*

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z}$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z\left(z^2 - 4z + 4\right)}$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z\left(z-2\right)^2}$$

*Ou seja, a função f possui um polo **não isolado** em $z = 0$, um vez que a função $z^{\frac{1}{2}}$ não está definida na parte positiva do eixo real (caso considere o argumento principal em $0 < \theta \leq 2\pi$) ou na parte negativa do eixo real (caso considere o argumento principal em $-\pi < \theta \leq \pi$). Em qualquer um dos casos $z = 0$ é um polo não isolado. Além disso, f possui um **polo isolado de ordem 2** em $z = 2$.*

Portanto,

$$\operatorname{Res}(f,2) = \lim_{z\to 2}\left[\frac{d}{dz}\left((z-2)^2 f(z)\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{d}{dz}\left((z-2)^2\frac{z^{\frac{1}{2}}}{z\left(z-2\right)^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}\right)\right]$$

$$= \lim_{z\to 2}\left[-\frac{1}{2\sqrt{z^3}}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{2}}$$

■

Exercício 4 *Considere o caminho C, dado por*

$$z = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta < 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$dz = ie^{i\theta}d\theta$$

$$= iz\, d\theta$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$= \frac{z^2 - 1}{2iz} \Rightarrow$$

$$\operatorname{sen}^4\theta = \left(\frac{z^2-1}{2iz}\right)^4$$

$$= \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16z^4}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \int_C \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16z^4}\frac{dz}{iz}$$

$$= \int_C \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16iz^5}dz$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16iz^5}$$

*possui um **polo de ordem 5** em $z = 0$ e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que*

$$\int_C \frac{\left(z^2-1\right)^4}{16iz^5}dz = 2\pi i\operatorname{Res}(f,0)$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{4!}\frac{d^4}{dz^4}z^5 f(z)\right]$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{24}\frac{d^4}{dz^4}z^5\frac{\left(z^2-1\right)^4}{16iz^5}\right]$$

$$= 2\pi i\lim_{z\to 0}\left[\frac{1}{24\cdot 16i}\frac{d^4}{dz^4}\left(z^2-1\right)^4\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{24\cdot 16i}\lim_{z\to 0}\left[\frac{d^4}{dz^4}\left(z^2-1\right)^4\right]$$

$$= \frac{\pi}{12\cdot 16}\lim_{z\to 0}\left[1680z^4 - 1440z^2 + 144\right]$$

$$= \frac{\pi}{12\cdot 16}144$$

$$= \frac{3\pi}{4}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^4\theta\, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

■

Exercício 5 *Para resolver a integral*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{(x^2+4)^2}dx$$

é necessário calcular a integral

$$\int_C \frac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)^2}dz$$

sendo C é a borda do semi-círculo de raio r e centro na origem cuja parametrização pode ser dada por

$$C = C_r \cup \gamma$$

com C sendo

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

e γ

$$z = t, -r \leq t \leq r$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)^2}$$

possui dois polos de ordem 2 em $z = 2i$ (estão dentro de C) e dois polos de ordem 2 em $z = -2i$ (estão fora de C). Assim, pelo ***Teorema dos Resíduos****, tem-se que*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$$

Porém,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_r} f(z)dz + \int_\gamma f(z)dz \\ &= 0 + \int_{-r}^{r} \frac{e^{it}dt}{\left(t^2+4\right)^2} \\ &= \int_{-r}^{r} \frac{\cos t\, dt}{\left(t^2+4\right)^2} + i\int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} dt}{\left(t^2+4\right)^2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, 2i) &= \lim_{z\to 2i}\left[\frac{d}{dz}(z-2i)f(z)\right] \\ &= \lim_{z\to 2i}\left[\frac{d}{dz}(z-2i)\frac{e^{iz}}{\left(z^2+4\right)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 2i}\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{\left(z+2i\right)^2}\right] \\ &= \lim_{z\to 2i}\left[\frac{ie^{iz}\left(z+2i\right)^2 - 2e^{iz}\left(z+2i\right)}{\left(z+2i\right)^4}\right] \\ &= \frac{-24ie^{-2}}{256} \\ &= \frac{-3i}{32e^2}\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-r}^{r} \frac{\cos t\, dt}{\left(t^2+4\right)^2} + i\int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} dt}{\left(t^2+4\right)^2} = 2\pi i\frac{-3i}{32e^2} \Rightarrow$$

$$\int_{-r}^{r} \frac{\cos t\, dt}{\left(t^2+4\right)^2} + i\int_{-r}^{r} \frac{\operatorname{sen} dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

e disto segue-se que

$$\int_{-r}^{r} \frac{\cos t\, dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} = \lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} \frac{\cos t\, dt}{\left(t^2+4\right)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

Observe agora que a função

$$f(x) = \frac{\cos x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

é par e disto segue-se que

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2}$$

ou seja

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} \\ &= 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x\, dx}{\left(x^2+4\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{3\pi}{16e^2} \\ &= \frac{3\pi}{32e^2}\end{aligned}$$

$\blacksquare$