Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof$^{\text{o}}$. Edson

1$^{\text{o}}$ Semestre

Gabarito 2$^{\text{a}}$ Prova **2017**
Data: Segunda-feira, 19 de Março de 2018 **Turma E5**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\begin{aligned} e^{2+i\frac{\pi}{4}} &= e^2 e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= e^2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) \\ &= e^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{e^2\sqrt{2}}{2} + i\frac{e^2\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned} \text{senh}\,(1+\pi i) &= \frac{e^{1+\pi i} - e^{-1-\pi i}}{2} \\ &= \frac{e(\cos\pi + i\,\text{sen}\,\pi) - e^{-1}(\cos\pi - i\,\text{sen}\,\pi)}{2} \\ &= \frac{-e+e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). *Observe que*

$$\begin{aligned} (1+i)^{1+i} &= e^{(1+i)\text{Ln}(1+i)} \\ &= e^{(1+i)[\ln|1+i| + iArg(1+i)]} \\ &= e^{(1+i)\left[\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right]} \\ &= e^{\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)} \\ &= a + bi \end{aligned}$$

Sendo

$$a = e^{\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)$$

$$b = e^{\left(\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4}\right)}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2}\right)$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned} \text{Ln}\left(\sqrt{3}+i\right) &= \ln\left|\sqrt{3}+i\right| + i\text{Arg}\left(\sqrt{3}+i\right) \\ &= \ln 2 + i\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 3

Perceba que

$$\begin{aligned} \text{Ln}\left(z^2-1\right) = i\frac{\pi}{2} &\Rightarrow \\ z^2 - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} &\Rightarrow \\ z^2 - 1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{2} &\Rightarrow \\ z^2 - 1 = i &\Rightarrow \\ z = \sqrt{1+i} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2} + i\,\text{sen}\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{2}\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right] \end{aligned}$$

com $k = 0, 1$. *Portanto*

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

ou

$$z = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right]$$

■

Exercício 4

Inicialmente, observe que a função $f(z) = \bar{z}$ *é não analítica para qualquer* $z \in \mathbb{C}$ *(use as* ***equações de Cauchy-Riemann*** *para conferir esta afirmação). Segue-se disto que não é possível utilizar-se o* ***Teorema de Cauchy-Goursat*** *para o cálculo da integral dada.*

Uma parametrização possível para o círculo $C : |z| = 2$ *é dada por*

$$z = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim,

$$\bar{z} = 2e^{-it}$$

$$dz = 2ie^{it}dt$$

Ou seja,

$$\int_C \bar{z}dz = \int_0^{2\pi} 2e^{-it}2e^{it}idt$$

$$= \int_0^{2\pi} 4idt$$

$$= 8\pi i$$

■

Exercício 5 *Considere C_2 sendo a curva correspondente ao percurso de* ***uma*** *volta no círculo $|z| = 4$ no sentido* ***antihorário****. Uma parametrização possivel para C_2 é dada por*

$$z = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como C é a curva que corresponde a duas voltas no círculo $|z| = 4$ no sentido antihorário, segue-se que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz = -2\int_{C_2} \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz$$

Além disso, a função

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$$

possui duas singularidades em $z = -2$ e $z = 1$ e ambas estão dentro do círculo $|z| = 4$. Decompondo o círculo C_2 nos semi-círculos C_{2e} (semi-círculo à esquerda) e C_{2d} (semi-círculo à direita) orientados também no sentido antihorário, tem-se que

$$\int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} = \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} + \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)}$$

e,usando a primeira fórmula de integral de Cauchy,

$$\int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} = \int_{C_{2e}} \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)}{z+2}dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z}{z-1}\right)\Big|_{z=-2}$$

$$= \frac{4\pi i}{3}$$

$$\int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} = \int_{C_{2d}} \frac{\left(\frac{z}{z+2}\right)}{z-1}dz$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z}{z+2}\right)\Big|_{z=1}$$

$$= \frac{2\pi i}{3}$$

Portanto

$$\int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} = \frac{4\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3}$$

$$= 2\pi i$$

e

$$\int_C \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} = -2\,(2\pi i)$$

$$= -4\pi i$$

■