

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 20 de Fevereiro

2017
Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned}(64i)^{\frac{5}{4}} &= \sqrt[4]{64^5 i^5} \\ &= 64^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{i}\end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}|i| &= 1 \\ \theta &= \text{Arg}(i) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{i} &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \cos \frac{\pi + 4k\pi}{8} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{8}\end{aligned}$$

Assim, calculando todas as possibilidades:

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right). \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

□

b). Deseja-se calcular

$$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018}$$

Para isto, observe que tal soma corresponde a uma **progressão geométrica** de razão i . Assim, segue-se que

$$S = \frac{1 - i^{2019}}{1 - i}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}i^{2019} &= i^{504 \times 4 + 3} \\ &= (i^4)^{504} i^3 \\ &= 1^{504} (-i) \\ &= -i\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ &= \frac{1 + i}{1 - i} \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1 + 2i - 1}{2} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i\end{aligned}$$

■

Exercício 2 Sabe-se que

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\frac{z^2 + 1}{z} &= 1 \Rightarrow \\ z^2 + 1 &= z \Rightarrow \\ z^2 - z + 1 &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, tem-se

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Assim,

$$|z| = |z_1| = |z_2| = 1$$

■

Exercício 3 Sendo z, i e iz vértices de um triângulo equilátero, segue-se que

$$|z - i| = |z - iz|$$

$$|z - i| = |i - iz|$$

Assim, considerando $z = x + iy$, as equações acima torna-se

$$\begin{cases} |x + iy - i| = |x + iy - ix + y| \\ |x + iy - i| = |i - ix + y| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = (x + y)^2 + (y - x)^2 \\ x^2 + (y - 1)^2 = y^2 + (1 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ou } \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Portanto

$$z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ou

$$z = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

■

Exercício 4 Sendo a esfera unitária de centro na origem a **Esfera de Riemann**, segue-se que o “norte” desta esfera é o ponto $N = (0, 0, 1)$ e o número complexo $z = a + bi$ visto como um ponto no espaço possui coordenadas $P = (a, b, 0)$. Desta forma, a reta que passa pelos pontos N e P possui uma parametrização possível dada por

$$\begin{aligned} r(t) &= N + (P - N)t \\ &= (0, 0, 1) + (a, b, -1)t \\ &= (at, bt, 1 - t) \end{aligned}$$

com $0 \leq t \leq 1$. Além disso, esta esfera possui equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Assim, a projeção de z sobre a esfera, nada mais é que o ponto da reta r que a toca. Ou seja

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 &= 1 \Rightarrow \\ (at)^2 + (bt)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \Rightarrow \\ a^2t^2 + b^2t^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1 \Rightarrow \\ a^2t^2 + b^2t^2 - 2t + t^2 &= 0 \Rightarrow \\ (a^2 + b^2 + 1)t^2 - 2t &= 0 \Rightarrow \\ t[(a^2 + b^2 + 1)t - 2] &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$t = 0$$

ou

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} \\ &= \frac{2}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

Para $t = 0$ tem-se o ponto N e para $t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$, tem-se a projeção procurada:

$$\begin{aligned} r\left(\frac{2}{|z|^2 + 1}\right) &= \left(\frac{2a}{|z|^2 + 1}, \frac{2b}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2a}{|z|^2 + 1}, \frac{2b}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Deseja-se avaliar a analiticidade da função

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

Para isto considere as funções

$$g(z) = z - i$$

e

$$h(z) = \bar{z} - i$$

Observe que g é uma função polinomial e, portanto analítica em todo $\mathbb{C}$. Por outro lado, a função h pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h(z) &= x - iy - i \\ &= x - i(y + 1), \end{aligned}$$

considerando-se $z = x + iy$. Assim, suas partes real e imaginária são

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y - 1 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, as equações de **Cauchy-Riemann** não são válidas para todo z . Disto conclui-se que h não é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Perceba que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e suponha que exista $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . Assim, como g é também analítica em z , segue que g/f também é analítica em z . Mas

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{\frac{g(z)}{h(z)}} = g(z) \frac{h(z)}{g(z)} = h(z)$$

o que é uma contradição, visto que h é não analítica em todo $\mathbb{C}$. Logo, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . ■