Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 22 de Maio de 2017

2016
Turma E5

Exercício 1 A função

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i [x(y - 1)^2 + x],$$

pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = -y + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = x(y - 1)^2 + x$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y - 1)^2 + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x(y - 1)$$

Para que f seja diferenciável num ponto (x, y) as equações de **Cauchy-Rieman** devem ser satisfeitas, ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Em outros termos,

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 2x(y - 1) \\ -1 = -(y - 1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = xy - x \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2 - y)x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, como as funções u , v e suas derivadas parciais são contínuas em $z = 1 + i$ (por serem polinômiais)

e as equações de **Cauchy-Rieman** estão satisfeitas neste ponto, segue-se que $z = 1 + i$ é o único ponto em que a função f é diferenciável. Além disso

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= i \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Sendo $z = x + iy$ a função

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 + i [2xy + (y - 1)^2] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = 2xy + (y - 1)^2$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y - 2$$

Portanto, u , v e suas derivadas são contínuas para qualquer (x, y) , uma vez que são polinômiais. Para que f seja diferenciável num ponto $z = x + iy$, além disso é também necessário que as equações

de Cauchy-Rieman sejam satisfeitas nesse ponto. Assim, deve-se ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 2x + 2y - 2 \\ -2y = -(2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, f é diferenciável em todos os pontos $z = x + iy$ com $x = y$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes do plano complexo). Perceba que para nenhum desses pontos é possível estabelecer uma vizinhança formada por pontos em que f é também diferenciável. Logo, não existe z para o qual f seja analítica. $\square$

b). Usando os resultados obtidos no item anterior, tem-se

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Inicialmente observe que a função

$$f(z) = \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}}$$

é contínua em todo o percurso definido pelo caminho C dado pela curva

$$z = 4e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Desta forma, a integral dada é independente do caminho escolhido, ou seja

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz &= \int_{z(-\frac{\pi}{2})}^{z(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz \\ &= \int_{-4i}^{4i} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{4} dz \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2} \Big|_{-4i}^{4i} \\ &= \frac{(4i)^{\frac{1}{2}} - (-4i)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \\ &= i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercício 4

a). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(z-4-3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(z-4-3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}} \frac{5^{2k}}{(z-4-3i)^k} \right| \\ &= \left| \frac{z-4-3i}{5^2} \right| \\ &= \frac{|z-4-3i|}{25} \end{aligned}$$

Segundo o teste da razão, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|z-4-3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ \frac{|z-4-3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ |z-4-3i| < 25 \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = 4 + 3i$ e raio $R = 25$. $\square$

b). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2} (z-i)^{2k}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+3)((k+1)!)^2} (z-i)^{(2k+2)}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(2k+2)!(z-i)^{(2k+2)} (k+2)(k!)^2}{(k+3)((k+1)!)^2 (2k)!(z-i)^{2k}} \right| \\
 &= \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 (k+2) \right| \\
 &= \left| \frac{2(k+1)(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 \right| \\
 &= \left| \frac{2(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)} (z-i)^2 \right| \\
 &= 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2
 \end{aligned}$$

Segundo o **teste da razão**, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2 < 1 &\Rightarrow \\
 4|z-i|^2 < 1 &\Rightarrow \\
 |z-i|^2 < \frac{1}{4} &\Rightarrow \\
 |z-i| < \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = i$ e raio $R = \frac{1}{2}$. ■

Exercício 5 Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2} \\
 &= \frac{z^2 - 2z + 1 - 1 + 2}{z - 2 + 1 - 1} \\
 &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1) - 1} \\
 &= \left[(z-1)^2 + 1 \right] \frac{1}{(z-1) - 1} \\
 &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\
 &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}
 \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n}
 \end{aligned}$$

Desde que

$$\left| \frac{1}{z-1} \right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z-1|$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\
 &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\
 &= (z-1) + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\
 &= 1 + (z-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(z-1)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

■