Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3ª Prova **2016**
Data: Terça-feira, 16 de Maio de 2017 **Turma E5**

Exercício 1

a). *O termo geral da série em questão é*

$$a_k = \frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(z-4-3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}}$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{(z-4-3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}}\frac{5^{2k}}{(z-4-3i)^k}\right| \\ &= \left|\frac{z-4-3i}{5^2}\right| \\ &= \frac{|z-4-3i|}{25}\end{aligned}$$

Segundo o ***teste da razão****, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}\frac{|z-4-3i|}{25} &< 1 \Rightarrow \\ \frac{|z-4-3i|}{25} &< 1 \Rightarrow \\ |z-4-3i| &< 25\end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = 4+3i$ e raio $R = 25$. □

b). *O termo geral da série em questão é*

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2}(z-i)^{2k}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+3)((k+1)!)^2}(z-i)^{(2k+2)}$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{(2k+2)!(z-i)^{(2k+2)}}{(k+3)((k+1)!)^2}\frac{(k+2)(k!)^2}{(2k)!(z-i)^{2k}}\right| \\ &= \left|\frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+3)(k+1)^2}(z-i)^2(k+2)\right| \\ &= \left|\frac{2(k+1)(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)^2}(z-i)^2\right| \\ &= \left|\frac{2(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)}(z-i)^2\right| \\ &= 2\left|\frac{2k^2+5k+2}{k^2+4k+3}\right||z-i|^2\end{aligned}$$

Segundo o ***teste da razão****, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que*

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty}2\left|\frac{2k^2+5k+2}{k^2+4k+3}\right||z-i|^2 &< 1 \Rightarrow \\ 4|z-i|^2 &< 1 \Rightarrow \\ |z-i|^2 &< \frac{1}{4} \Rightarrow \\ |z-i| &< \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = i$ e raio $R = \dfrac{1}{2}$. ■

Exercício 2 *Observe inicialmente que*

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

e

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]' = \frac{2(1-z)}{(1-z)^4} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

Ou seja

$$\frac{z}{(1-z)^3} = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)''$$

Sabe-se que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,\ |z|<1$$

Logo

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2}$$

e disto, segue-se que

$$\frac{z}{(1-z)^3} = \frac{z}{2}\left(\frac{1}{1-z}\right)'' = \frac{z}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(n-1)z^{n-1}}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)nz^n}{2}$$

para $|z|<1$. ■

Exercício 3 *Inicialmente observe que*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^2-2z+2}{z-2} \\ &= \frac{z^2-2z+1-1+2}{z-2+1-1} \\ &= \frac{(z-1)^2+1}{(z-1)-1} \\ &= \left[(z-1)^2+1\right]\frac{1}{(z-1)-1} \\ &= \frac{(z-1)^2+1}{(z-1)}\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= \left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z-1}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

Desde que

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z-1|$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} f(z) &= \left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} \\ &= \left[(z-1)+(z-1)^{-1}\right]\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\ &= (z-1)+1+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\ &= 1+(z-1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{(z-1)^{n-1}} \end{aligned}$$

■

Exercício 4

a) *Considere*

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^4}$$

Observe que $z=0$ e $z=1$ são os polos da função dada e apenas $z=1$ encontra-se dentro do circulo $|z-2| = \frac{3}{2}$. Além disto, $z=1$ é um polo de ordem 4 ou seja

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),1) &= \frac{1}{3!}\lim_{z\to 1}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left[(z-1)^4 f(z)\right] \\
&= \frac{1}{6}\lim_{z\to 1}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{1}{z^3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\lim_{z\to 1}\frac{-60}{z^6} \\
&= -10
\end{aligned}$$

*e usando o **teorema de Resíduos de Cauchy**, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4}dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f(z),1) \\
&= -20\pi i
\end{aligned}$$

□

b) *Considere*

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{e^z}{z^3+2z^2} \\
&= \frac{e^z}{z^2\,(z+2)}
\end{aligned}$$

Observe que $z=0$ e $z=-2$ são os polos da função dada e ambos encontram-se dentro do circulo $|z|=3$. Além disto, $z=-2$ é um polo simples e $z=0$ é um polo de ordem 2. Portanto

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),-2) &= \lim_{z\to -2}(z+2)f(z) \\
&= \lim_{z\to -2}\frac{e^z}{z^2} \\
&= \frac{e^{-2}}{4}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z),0) &= \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\left[z^2 f(z)\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{e^z}{(z+2)}\right] \\
&= \lim_{z\to 0}\frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

*e usando o **teorema de Resíduos de Cauchy**, tem-se que*

$$\begin{aligned}
\oint_C \frac{e^z}{z^3+2z^2}dz &= 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f(z),-2)+\operatorname{Res}(f(z),0)\right) \\
&= 2\pi i\left(\frac{e^{-2}+1}{4}\right) \\
&= \pi i\left(\frac{e^{-2}+1}{2}\right)
\end{aligned}$$

□

Exercício 5 *Observe inicialmente que*

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$t = 2\pi - \theta$$

Então

$$dt = -d\theta$$

e,

$$\theta = \pi \Rightarrow t = \pi$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow t = 0$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
\int_{\pi}^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} &= \int_{\pi}^{0}\frac{-dt}{(a+\cos(2\pi-t))^2} \\
&= \int_{\pi}^{0}\frac{-dt}{(a+\cos t)^2} \\
&= -\int_{\pi}^{0}\frac{dt}{(a+\cos t)^2} \\
&= \int_{0}^{\pi}\frac{dt}{(a+\cos t)^2} \\
&= \int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}+\int_\pi^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}+\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$
$$=2\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

Ou seja

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$

Seja C o círculo dado por

$$z=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Observe que

$$dz=ie^{i\theta}d\theta\Leftrightarrow$$
$$dz=izd\theta\Leftrightarrow$$
$$\frac{dz}{iz}=d\theta$$

Além disto,

$$z=\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta$$
$$z^{-1}=\cos\theta-i\operatorname{sen}\theta$$

ou seja

$$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$$
$$=\frac{z^2+1}{2z}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\oint_C\frac{dz}{iz\left(a+\frac{z^2+1}{2z}\right)^2}$$
$$=\oint_C\frac{4zdz}{i\left(z^2+2az+1\right)^2}$$

Os polos da função

$$f(z)=\frac{4z}{i\left(z^2+2az+1\right)^2}$$

são

$$z_0=-a-\sqrt{a^2-1}$$
$$z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$$

Dos quais apenas z_1 encontra-se dentro de C. O polo z_1 possui ordem 2 e usando o ***teorema de Resíduos de Cauchy****, tem-se*

$$\oint_C\frac{4zdz}{i\left(z^2+2az+1\right)^2}=2\pi i\operatorname{Res}(f(z),z_1)$$

Calculando o resíduo, tem-se

$$\operatorname{Res}(f(z),z_1)=\lim_{z\to z_1}\frac{\partial}{\partial z}\left[(z-z_1)^2f(z)\right]$$
$$=\lim_{z\to z_1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{4z}{i(z-z_0)^2}\right)$$
$$=\lim_{z\to z_1}\frac{4i(z-z_0)^2-8iz(z-z_0)}{-(z-z_0)^2}$$
$$=\frac{4i(z_1-z_0)^2-8iz_1(z_1-z_0)}{-(z_1-z_0)^4}$$
$$=\frac{16ia\sqrt{a^2-1}}{-16\left(a^2-1\right)^2}$$
$$=\frac{ia}{-\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Portanto

$$\oint_C\frac{2zdz}{i\left(z^2+2az+1\right)^2}=2\pi i\operatorname{Res}(f(z),z_1)$$
$$=2\pi i\frac{ia}{-\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{2a\pi}{\left(a^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e, por fim

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\oint_C\frac{2zdz}{i\left(z^2+2az+1\right)^2}$$
$$=\frac{2a\pi}{2\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3}$$
$$=\frac{a\pi}{\left(\sqrt{a^2-1}\right)^3}$$

■