Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2^a Prova **2016**
Data: Sábado, 29 de Abril de 2017 **Turma E5**

Exercício 1

a). *Observe que*

$$\begin{aligned}-i &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right) - i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\ &= e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Portanto a equação dada, torna-se

$$e^{z-1} = -ie^3$$
$$\Leftrightarrow$$
$$e^{z-1} = e^{3-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}z &= 1+3-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\\ &= 4-i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned}-1 &= \cos(\pi+2k\pi) + i\,\mathrm{sen}\,(\pi+2k\pi)\\ &= e^{i(\pi+2k\pi)},\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

Portanto a equação dada, torna-se

$$e^{\frac{1}{z}} = -1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$e^{\frac{1}{z}} = e^{i(\pi+2k\pi)}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= i\,(\pi+2k\pi) \Rightarrow\\ z &= \frac{1}{i\,(\pi+2k\pi)} \Rightarrow\\ z &= \frac{-i}{\pi+2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere $z\in\mathbb{C}_*$, $\alpha\in\mathbb{C}$ e $n\in\mathbb{Z}$. Por definição sabe-se que*

$$z^\alpha = e^{\alpha\ln z}$$

e

$$\ln z = \log_e\|z\| + i\arg(z)$$

Assim,

$$\begin{aligned}z^\alpha &= e^{\alpha(\log_e\|z\|+i\arg(z))}\\ &= e^{\alpha\log_e\|z\|}e^{i\,\alpha\arg(z)}\\ &= e^{\log_e\|z\|^\alpha}e^{i\,\alpha\arg(z)}\\ &= \|z\|^\alpha\,e^{i\,\alpha\arg(z)}\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}(z^\alpha)^n &= \left(\|z\|^\alpha\,e^{i\,\alpha\ \arg(z)}\right)^n\\ &= (\|z\|^\alpha)^n\left[e^{i\,\alpha\ \arg(z)}\right]^n\\ &= \|z\|^{\alpha n}\,e^{i\,n\,\alpha\arg(z)}\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}z^{\alpha n} &= e^{\alpha\,n\,(\log_e\|z\|+i\arg(z))}\\ &= e^{\alpha\,n\ \log_e\|z\|}e^{i\,\alpha\,n\arg(z)}\\ &= e^{\log_e\|z\|^{\alpha n}}e^{i\,\alpha\,n\arg(z)}\\ &= \|z\|^{\alpha n}\,e^{i\,\alpha\,n\arg(z)}\\ &= (z^\alpha)^n\end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Inicialmente observe que a função*

$$f(z) = \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}}$$

é contínua em todo o percurso definido pelo caminho C dado pela curva

$$z = 4e^{it},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$$

Desta forma, a integral dada é independente do caminho escolhido, ou seja

$$\int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz = \int_{z(-\frac{\pi}{2})}^{z(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz$$

$$= \int_{-4i}^{4i} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{4} dz$$

$$= \left. \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2} \right|_{-4i}^{4i}$$

$$= \frac{(4i)^{\frac{1}{2}} - (-4i)^{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$= i\sqrt{2}$$

■

Exercício 4 *Deseja-se calcular a integral*

$$A = \oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3} \right) dz$$

sendo C a curva dada pela equação $|z| = 6$.

Observe inicialmente que

$$A = \oint_C \frac{e^{2iz}}{z^4} dz - \oint_C \frac{z^4}{(z-i)^3} dz$$

e que $z = 4$ é uma singularidade para a primeira integral e $z = i$ é uma singularidade para a segunda integral.Além disto, ambas as singularidades encontram-se no interior da curva C. Usando a ***segunda fórmula integral de Cauchy****, tem-se que*

$$\oint_C \frac{e^{2iz}}{z^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left. \frac{d^3}{dz^3} \left(e^{2iz} \right) \right|_{z=0}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \left. \left(-8ie^{2iz} \right) \right|_{z=0}$$

$$= \frac{8\pi}{3}$$

$$\oint_C \frac{z^4}{(z-i)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dz^2} \left(z^4 \right) \right|_{z=i}$$

$$= \pi i \left. \left(12z^2 \right) \right|_{z=i}$$

$$= -12\pi i$$

Ou seja,

$$A = \frac{8\pi}{3} + 12\pi i$$

■

Exercício 5

a). *Observe que $z = -i$ é a única singularidade da função*

$$f(z) = \frac{z}{(z+i)^4}$$

e está no interior do círculo C definido pela curva de equação $\|z\| = 2$.Usando a ***segunda fórmula integral de Cauchy****, tem-se*

$$\oint_C \frac{z}{(z+i)^4} dz = \frac{2\pi i}{3!} \left. \frac{d^3}{dz^3} (z) \right|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi i}{3} \left. (0) \right|_{z=-i}$$

$$= \frac{\pi i}{3} (0)$$

$$= 0$$

□

b). *Observe que $z = 0$ é a única singularidade da função*

$$f(z) = \frac{e^{-z} \operatorname{sen} z}{z^3}$$

e está no interior do círculo C definido pela curva de equação $\|z - 1\| = 3$.Usando a ***segunda fórmula integral de Cauchy****, tem-se*

$$\oint_C \frac{e^{-z} \operatorname{sen} z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \left. \frac{d^2}{dz^2} \left(e^{-z} \operatorname{sen} z \right) \right|_{z=0}$$

$$= \pi i \left. \left(-2 \cos z \, e^{-z} \right) \right|_{z=0}$$

$$= -2\pi i$$

■