

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 2 de Junho

2016
Turma E5

Exercício 1 *Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os números complexos que deseja-se encontrar. Como um deve ser o conjugado do outro, conforme diz o enunciado do problema, considere*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= a + bi \\ \mathbf{v} &= a - bi\end{aligned}$$

Além disso, deve-se ter

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= 1 \Rightarrow \\ a + bi + a - bi &= 1 \Rightarrow \\ 2a &= 1 \Rightarrow \\ a &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| &= 2 \Rightarrow \\ 2\sqrt{a^2 + b^2} &= 2 \Rightarrow \\ a^2 + b^2 &= 1 \Rightarrow \\ b^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow \\ b &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício 2

a). *Observe que*

$$\begin{aligned}|1 + i| &= \sqrt{2} \\ \text{Arg}(1 + i) &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Ou seja

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

e

$$\begin{aligned}(1+i)^{\frac{1}{3}} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]\end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2$. Portanto

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{ou}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{ou}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned}|\sqrt{3} + i| &= 2 \\ \text{Arg}(\sqrt{3} + i) &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

e

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} &= \left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right]^{-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \frac{1}{\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)^{\frac{1}{5}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2} \left[\cos \left(\frac{1}{5} \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{1}{5} \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]\end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ou seja

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{17\pi}{30} - i \sin \frac{17\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{29\pi}{30} - i \sin \frac{29\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{41\pi}{30} - i \sin \frac{41\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{53\pi}{30} - i \sin \frac{53\pi}{30} \right)$$

■

Exercício 3 Observe que a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4}, & \text{se } z \neq \pm 2 \\ k, & \text{se } z = 2 \end{cases}$$

i) Está definida em $z = 2$ visto que $f(2) = k$.

ii) Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z - 5}{2z} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ou seja, o limite existe. Na primeira passagem da dedução deste limite usou-se a **regra de L'Hospital**.

iii) Por fim, a continuidade da função f em $z = 2$ será verdadeira se os resultados obtidos nos itens (i) e (ii) forem iguais, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2} f(z) &= f(2) \Rightarrow \\ -\frac{1}{4} &= k \end{aligned}$$

Assim, se $k = -\frac{1}{4}$ a função f será contínua em $z = 2$.

■

Exercício 4 A função

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i[x(y - 1)^2 + x],$$

pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = -y + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = x(y - 1)^2 + x$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y - 1)^2 + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x(y - 1)$$

Para que f seja diferenciável num ponto (x, y) as equações de **Cauchy-Rieman** devem ser satisfeitas, ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Em outros termos,

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 2x(y - 1) \\ -1 = -(y - 1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = xy - x \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2 - y)x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, como as funções u, v e suas derivadas parciais são contínuas em $z = 1 + i$ (por serem polinomiais) e as equações de **Cauchy-Rieman** estão satisfeitas neste ponto, segue-se que $z = 1 + i$ é o único ponto em que a função f é diferenciável. Além disso

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= i \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). Sendo $z = x + iy$ a função

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 + i[2xy + (y - 1)^2] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 \\ v(x, y) &= 2xy + (y - 1)^2 \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y - 2$$

Portanto, u , v e suas derivadas são contínuas para qualquer (x, y) , uma vez que são polinomiais. Para que f seja diferenciável num ponto $z = x + iy$,

além disso é também necessário que as equações de Cauchy-Rieman sejam satisfeitas nesse ponto. Assim, deve-se ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 2x + 2y - 2 \\ -2y = -(2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, f é diferenciável em todos os pontos $z = x + iy$ com $x = y$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes do plano complexo). Perceba que para nenhum desses pontos é possível estabelecer uma vizinhança formada por pontos em que f é também diferenciável. Logo, não existe z para o qual f seja analítica. $\square$

b). Usando os resultados obtidos no item anterior, tem-se

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

■