

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof. Edson

1ª Prova

2º Semestre

2016

Data: 21 de Fevereiro de 2017

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine dois números complexos tais que um é conjugado do outro, o módulo de sua soma é 1 e a soma de seus módulos é 2.*

Problema 2 *Calcule*

a). $(1 + i)^{\frac{1}{3}}$;

b). $(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}}$.

Problema 3 *Considere a função*

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4}, & \text{se } z \neq \pm 2 \\ k, & \text{se } z = 2 \end{cases}$$

Determine o valor de k de modo que f seja contínua em $z = 2$.

Problema 4 *Determine os pontos onde a função*

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i [x(y - 1)^2 + x]$$

é diferenciável e calcule sua derivada neles.

Problema 5 *Considere $f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$.*

a). *Determine onde a função f é analítica.*

b). *Calcule $f'(1 + i)$.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 2 de Junho

2016
Turma E5

Exercício 1 *Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os números complexos que deseja-se encontrar. Como um deve ser o conjugado do outro, conforme diz o enunciado do problema, considere*

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= a + bi \\ \mathbf{v} &= a - bi\end{aligned}$$

Além disso, deve-se ter

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &= 1 \Rightarrow \\ a + bi + a - bi &= 1 \Rightarrow \\ 2a &= 1 \Rightarrow \\ a &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| &= 2 \Rightarrow \\ 2\sqrt{a^2 + b^2} &= 2 \Rightarrow \\ a^2 + b^2 &= 1 \Rightarrow \\ b^2 &= \frac{3}{4} \Rightarrow \\ b &= \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exercício 2

a). *Observe que*

$$\begin{aligned}|1 + i| &= \sqrt{2} \\ \text{Arg}(1 + i) &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Ou seja

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

e

$$\begin{aligned}(1+i)^{\frac{1}{3}} &= \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[6]{2} \left[\cos \left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{1}{3} \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right]\end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2$. Portanto

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \quad \text{ou}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad \text{ou}$$

$$(1+i)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right).$$

□

b). *Observe que*

$$\begin{aligned}|\sqrt{3} + i| &= 2 \\ \text{Arg}(\sqrt{3} + i) &= \frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

Portanto,

$$-\sqrt{3} + i = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

e

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} &= \left[2 \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) \right]^{-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \frac{1}{\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right)^{\frac{1}{5}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2} \left[\cos \left(\frac{1}{5} \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{1}{5} \frac{5\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) - i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right]\end{aligned}$$

com $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Ou seja

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{17\pi}{30} - i \sin \frac{17\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{29\pi}{30} - i \sin \frac{29\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{41\pi}{30} - i \sin \frac{41\pi}{30} \right) \quad \text{ou}$$

$$(-\sqrt{3} + i)^{-\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \left(\cos \frac{53\pi}{30} - i \sin \frac{53\pi}{30} \right)$$

■

Exercício 3 Observe que a função

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4}, & \text{se } z \neq \pm 2 \\ k, & \text{se } z = 2 \end{cases}$$

i) Está definida em $z = 2$ visto que $f(2) = k$.

ii) Além disso,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{z^2 - 5z + 6}{z^2 - 4} \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{2z - 5}{2z} \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ou seja, o limite existe. Na primeira passagem da dedução deste limite usou-se a **regra de L'Hospital**.

iii) Por fim, a continuidade da função f em $z = 2$ será verdadeira se os resultados obtidos nos itens (i) e (ii) forem iguais, ou seja

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2} f(z) &= f(2) \Rightarrow \\ -\frac{1}{4} &= k \end{aligned}$$

Assim, se $k = -\frac{1}{4}$ a função f será contínua em $z = 2$.

■

Exercício 4 A função

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i[x(y - 1)^2 + x],$$

pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = -y + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = x(y - 1)^2 + x$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y - 1)^2 + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x(y - 1)$$

Para que f seja diferenciável num ponto (x, y) as equações de **Cauchy-Rieman** devem ser satisfeitas, ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Em outros termos,

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 2x(y - 1) \\ -1 = -(y - 1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = xy - x \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2 - y)x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, como as funções u, v e suas derivadas parciais são contínuas em $z = 1 + i$ (por serem polinomiais) e as equações de **Cauchy-Rieman** estão satisfeitas neste ponto, segue-se que $z = 1 + i$ é o único ponto em que a função f é diferenciável. Além disso

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= i \end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). Sendo $z = x + iy$ a função

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 + i[2xy + (y - 1)^2] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 \\ v(x, y) &= 2xy + (y - 1)^2 \end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y - 2$$

Portanto, u , v e suas derivadas são contínuas para qualquer (x, y) , uma vez que são polinomiais. Para que f seja diferenciável num ponto $z = x + iy$,

além disso é também necessário que as equações de Cauchy-Rieman sejam satisfeitas nesse ponto. Assim, deve-se ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 2x + 2y - 2 \\ -2y = -(2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, f é diferenciável em todos os pontos $z = x + iy$ com $x = y$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes do plano complexo). Perceba que para nenhum desses pontos é possível estabelecer uma vizinhança formada por pontos em que f é também diferenciável. Logo, não existe z para o qual f seja analítica. $\square$

b). Usando os resultados obtidos no item anterior, tem-se

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

2ª Prova

2º Semestre

2016

Data: 11 de Abril de 2017

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Encontre todos os valores complexos z que satisfazem as equações:*

a). $e^{z-1} = -ie^3;$

b). $e^{\frac{1}{z}} = -1.$

Problema 2 *Mostre que*

$$(z^\alpha)^n = z^{\alpha n}$$

para todo $z \in \mathbb{C}_$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$.*

Problema 3 *Calcule*

$$\int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz$$

onde C é o arco do círculo $z = 4e^{it}$ com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Problema 4 *Calcule*

$$\oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3} \right) dz$$

sendo C a curva dada pela equação $|z| = 6$.

Problema 5 *Resolva as integrais*

a). $\oint_C \frac{z}{(z+i)^4} dz$, C é a curva $|z| = 2$;

b). $\oint_C \frac{e^{-z} \operatorname{sen} z}{z^3} dz$, C é a curva $|z-1| = 3$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Sábado, 29 de Abril de 2017

2016
Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned} -i &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Portanto a equação dada, torna-se

$$\begin{aligned} e^{z-1} &= -ie^3 \\ \Leftrightarrow \\ e^{z-1} &= e^{3-i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} z &= 1 + 3 - i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= 4 - i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned} -1 &= \cos(\pi + 2k\pi) + i \sin(\pi + 2k\pi) \\ &= e^{i(\pi + 2k\pi)}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Portanto a equação dada, torna-se

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= -1 \\ \Leftrightarrow \\ e^{\frac{1}{z}} &= e^{i(\pi + 2k\pi)} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= i(\pi + 2k\pi) \Rightarrow \\ z &= \frac{1}{i(\pi + 2k\pi)} \Rightarrow \\ z &= \frac{-i}{\pi + 2k\pi}, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Considere $z \in \mathbb{C}_*$, $\alpha \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}$. Por definição sabe-se que

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

e

$$\ln z = \log_e \|z\| + i \arg(z)$$

Assim,

$$\begin{aligned} z^\alpha &= e^{\alpha(\log_e \|z\| + i \arg(z))} \\ &= e^{\alpha \log_e \|z\|} e^{i \alpha \arg(z)} \\ &= e^{\log_e \|z\|^\alpha} e^{i \alpha \arg(z)} \\ &= \|z\|^\alpha e^{i \alpha \arg(z)} \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} (z^\alpha)^n &= \left(\|z\|^\alpha e^{i \alpha \arg(z)}\right)^n \\ &= (\|z\|^\alpha)^n \left[e^{i \alpha \arg(z)}\right]^n \\ &= \|z\|^{\alpha n} e^{i n \alpha \arg(z)} \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} z^{\alpha n} &= e^{\alpha n (\log_e \|z\| + i \arg(z))} \\ &= e^{\alpha n \log_e \|z\|} e^{i \alpha n \arg(z)} \\ &= e^{\log_e \|z\|^{\alpha n}} e^{i \alpha n \arg(z)} \\ &= \|z\|^{\alpha n} e^{i \alpha n \arg(z)} \\ &= (z^\alpha)^n \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Inicialmente observe que a função

$$f(z) = \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}}$$

é contínua em todo o percurso definido pelo caminho C dado pela curva

$$z = 4e^{it}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Desta forma, a integral dada é independente do caminho escolhido, ou seja

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz &= \int_{z(-\frac{\pi}{2})}^{z(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz \\
 &= \int_{-4i}^{4i} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{4} dz \\
 &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2} \Big|_{-4i}^{4i} \\
 &= \frac{(4i)^{\frac{1}{2}} - (-4i)^{\frac{1}{2}}}{2} \\
 &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \\
 &= i\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Exercício 4 Deseja-se calcular a integral

$$A = \oint_C \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3} \right) dz$$

sendo C a curva dada pela equação $|z| = 6$.

Observe inicialmente que

$$A = \oint_C \frac{e^{2iz}}{z^4} dz - \oint_C \frac{z^4}{(z-i)^3} dz$$

e que $z = 4$ é uma singularidade para a primeira integral e $z = i$ é uma singularidade para a segunda integral. Além disto, ambas as singularidades encontram-se no interior da curva C . Usando a **segunda fórmula integral de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{e^{2iz}}{z^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (e^{2iz}) \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{\pi i}{3} (-8ie^{2iz}) \Big|_{z=0} \\
 &= \frac{8\pi}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{z^4}{(z-i)^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (z^4) \Big|_{z=i} \\
 &= \pi i (12z^2) \Big|_{z=i} \\
 &= -12\pi i
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$A = \frac{8\pi}{3} + 12\pi i$$

■

Exercício 5

a). Observe que $z = -i$ é a única singularidade da função

$$f(z) = \frac{z}{(z+i)^4}$$

e está no interior do círculo C definido pela curva de equação $\|z\| = 2$. Usando a **segunda fórmula integral de Cauchy**, tem-se

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{z}{(z+i)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \frac{d^3}{dz^3} (z) \Big|_{z=-i} \\
 &= \frac{\pi i}{3} (0) \Big|_{z=-i} \\
 &= \frac{\pi i}{3} (0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

b). Observe que $z = 0$ é a única singularidade da função

$$f(z) = \frac{e^{-z} \sin z}{z^3}$$

e está no interior do círculo C definido pela curva de equação $\|z - 1\| = 3$. Usando a **segunda fórmula integral de Cauchy**, tem-se

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{e^{-z} \sin z}{z^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} (e^{-z} \sin z) \Big|_{z=0} \\
 &= \pi i (-2 \cos z e^{-z}) \Big|_{z=0} \\
 &= -2\pi i
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2016

Data: 11 de Maio de 2017

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine o círculo e o raio de convergência das séries de potências:*

a). $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$

b). $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2} (z-i)^{2k}.$

Problema 2 *Escreva a **série de McLaurin** e dê o raio de convergência, da seguinte função*

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^3}.$$

Problema 3 *Expanda a função*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$$

*em uma **série de Laurent** que seja válida no domínio $|z - 1| > 1$.*

Problema 4 *Calcule as integrais*

a). $\oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4} dz$, C é a curva $|z - 2| = \frac{3}{2}$;

b). $\oint_C \frac{e^z}{z^3 + 2z^2} dz$, C é a curva $|z| = 3$.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$$

onde $a > 1$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Terça-feira, 16 de Maio de 2017

2016
Turma E5

Exercício 1

a). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(z - 4 - 3i)^k}{5^{2k}}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(z - 4 - 3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(z - 4 - 3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}} \frac{5^{2k}}{(z - 4 - 3i)^k} \right| \\ &= \left| \frac{z - 4 - 3i}{5^2} \right| \\ &= \frac{|z - 4 - 3i|}{25} \end{aligned}$$

Segundo o **teste da razão**, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|z - 4 - 3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ \frac{|z - 4 - 3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ |z - 4 - 3i| < 25 \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = 4 + 3i$ e raio $R = 25$. $\square$

b). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2} (z-i)^{2k}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+3)((k+1)!)^2} (z-i)^{(2k+2)}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(2k+2)!(z-i)^{(2k+2)}}{(k+3)((k+1)!)^2} \frac{(k+2)(k!)^2}{(2k)!(z-i)^{2k}} \right| \\ &= \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 (k+2) \right| \\ &= \left| \frac{2(k+1)(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 \right| \\ &= \left| \frac{2(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)} (z-i)^2 \right| \\ &= 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2 \end{aligned}$$

Segundo o **teste da razão**, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2 < 1 &\Rightarrow \\ 4 |z-i|^2 < 1 &\Rightarrow \\ |z-i|^2 < \frac{1}{4} &\Rightarrow \\ |z-i| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = i$ e raio $R = \frac{1}{2}$. $\blacksquare$

Exercício 2 Observe inicialmente que

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-z}\right)'' &= \left[\frac{1}{(1-z)^2}\right]' \\ &= \frac{2(1-z)}{(1-z)^4} \\ &= \frac{2}{(1-z)^3}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{z}{(1-z)^3} = \frac{z}{2} \left(\frac{1}{1-z}\right)''$$

Sabe-se que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n, \quad |z| < 1$$

Logo

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-z}\right)' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} \\ \left(\frac{1}{1-z}\right)'' &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2}\end{aligned}$$

e disto, segue-se que

$$\begin{aligned}\frac{z}{(1-z)^3} &= \frac{z}{2} \left(\frac{1}{1-z}\right)'' \\ &= \frac{z}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) z^{n-2} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1) z^{n-1}}{2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1) n z^n}{2}\end{aligned}$$

para $|z| < 1$.**Exercício 3** Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2} \\ &= \frac{z^2 - 2z + 1 - 1 + 2}{z - 2 + 1 - 1} \\ &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1) - 1} \\ &= \left[(z-1)^2 + 1\right] \frac{1}{(z-1) - 1} \\ &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\ &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1}\right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}\end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-1}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n}\end{aligned}$$

Desde que

$$\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z-1|$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}f(z) &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1}\right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\ &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1}\right] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\ &= (z-1) + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\ &= 1 + (z-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(z-1)^{n-1}}\end{aligned}$$

■

■

Exercício 4

a) Considere

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)^4}$$

Observe que $z = 0$ e $z = 1$ são os polos da função dada e apenas $z = 1$ encontra-se dentro do círculo $|z - 2| = \frac{3}{2}$. Além disto, $z = 1$ é um polo de ordem 4 ou seja

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), 1) &= \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3}{\partial z^3} [(z-1)^4 f(z)] \\ &= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{\partial^3}{\partial z^3} \left(\frac{1}{z^3} \right) \\ &= \frac{1}{6} \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-60}{z^6} \\ &= -10 \end{aligned}$$

e usando o **teorema de Resíduos de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{z^3(z-1)^4} dz &= 2\pi i \text{Res}(f(z), 1) \\ &= -20\pi i \end{aligned}$$

□

b) Considere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^z}{z^3 + 2z^2} \\ &= \frac{e^z}{z^2(z+2)} \end{aligned}$$

Observe que $z = 0$ e $z = -2$ são os polos da função dada e ambos encontram-se dentro do círculo $|z| = 3$. Além disto, $z = -2$ é um polo simples e $z = 0$ é um polo de ordem 2. Portanto

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), -2) &= \lim_{z \rightarrow -2} (z+2)f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2} \frac{e^z}{z^2} \\ &= \frac{e^{-2}}{4} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{Res}(f(z), 0) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} [z^2 f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^z}{(z+2)} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z(z+1)}{(z+2)^2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

e usando o **teorema de Resíduos de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^z}{z^3 + 2z^2} dz &= 2\pi i (\text{Res}(f(z), -2) + \text{Res}(f(z), 0)) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{-2} + 1}{4} \right) \\ &= \pi i \left(\frac{e^{-2} + 1}{2} \right) \end{aligned}$$

□

Exercício 5 Observe inicialmente que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} + \int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$t = 2\pi - \theta$$

Então

$$dt = -d\theta$$

e,

$$\theta = \pi \Rightarrow t = \pi$$

$$\theta = 2\pi \Rightarrow t = 0$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} &= \int_\pi^0 \frac{-dt}{(a + \cos(2\pi - t))^2} \\ &= \int_\pi^0 \frac{-dt}{(a + \cos t)^2} \\ &= - \int_\pi^0 \frac{dt}{(a + \cos t)^2} \\ &= \int_0^\pi \frac{dt}{(a + \cos t)^2} \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} + \int_\pi^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \\ &= \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} + \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \\ &= 2 \int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2}$$

Seja C o círculo dado por

$$z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Observe que

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Leftrightarrow$$

$$dz = iz d\theta \Leftrightarrow$$

$$\frac{dz}{iz} = d\theta$$

Além disto,

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$z^{-1} = \cos \theta - i \sin \theta$$

ou seja

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{z + z^{-1}}{2} \\ &= \frac{z^2 + 1}{2z}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} &= \oint_C \frac{dz}{iz \left(a + \frac{z^2+1}{2z}\right)^2} \\ &= \oint_C \frac{4z dz}{i(z^2 + 2az + 1)^2}\end{aligned}$$

Os polos da função

$$f(z) = \frac{4z}{i(z^2 + 2az + 1)^2}$$

são

$$z_0 = -a - \sqrt{a^2 - 1}$$

$$z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$$

Dos quais apenas z_1 encontra-se dentro de C . O polo z_1 possui ordem 2 e usando o **teorema de Resíduos de Cauchy**, tem-se

$$\oint_C \frac{4z dz}{i(z^2 + 2az + 1)^2} = 2\pi i \text{Res}(f(z), z_1)$$

Calculando o resíduo, tem-se

$$\begin{aligned}\text{Res}(f(z), z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\partial}{\partial z} [(z - z_1)^2 f(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4z}{i(z - z_0)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{4i(z - z_0)^2 - 8iz(z - z_0)}{-(z - z_0)^2} \\ &= \frac{4i(z_1 - z_0)^2 - 8iz_1(z_1 - z_0)}{-(z_1 - z_0)^4} \\ &= \frac{16ia\sqrt{a^2 - 1}}{-16(a^2 - 1)^2} \\ &= \frac{ia}{-(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2z dz}{i(z^2 + 2az + 1)^2} &= 2\pi i \text{Res}(f(z), z_1) \\ &= 2\pi i \frac{ia}{-(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{2a\pi}{(a^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

e, por fim

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \\ &= \frac{1}{2} \oint_C \frac{2z dz}{i(z^2 + 2az + 1)^2} \\ &= \frac{2a\pi}{2(\sqrt{a^2 - 1})^3} \\ &= \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2 - 1})^3}\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

Prova Final

2º Semestre

2016

Data: 18 de Maio de 2017

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine os pontos onde a função*

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i [x(y - 1)^2 + x]$$

é diferenciável e calcule sua derivada neles.

Problema 2 *Considere $f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$.*

a). *Determine onde a função f é analítica.*

b). *Calcule $f'(1 + i)$.*

Problema 3 *Calcule*

$$\int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz$$

onde C é o arco do círculo $z = 4e^{it}$ com $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Problema 4 *Determine o círculo e o raio de convergência das séries de potências:*

a). $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-4-3i)^k}{5^{2k}}$

b). $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2} (z-i)^{2k}$.

Problema 5 *Expanda a função*

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2}$$

*em uma **série de Laurent** que seja válida no domínio $|z - 1| > 1$.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 22 de Maio de 2017

2016
Turma E5

Exercício 1 A função

$$f(z) = -y + (x - 1)^2 + i[x(y - 1)^2 + x],$$

pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = -y + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = x(y - 1)^2 + x$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -1$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = (y - 1)^2 + 1$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x(y - 1)$$

Para que f seja diferenciável num ponto (x, y) as equações de **Cauchy-Rieman** devem ser satisfeitas, ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Em outros termos,

$$\begin{cases} 2(x - 1) = 2x(y - 1) \\ -1 = -(y - 1)^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - 1 = xy - x \\ (y - 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (2 - y)x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Assim, como as funções u , v e suas derivadas parciais são contínuas em $z = 1 + i$ (por serem polinomiais)

e as equações de **Cauchy-Rieman** estão satisfeitas neste ponto, segue-se que $z = 1 + i$ é o único ponto em que a função f é diferenciável. Além disso

$$\begin{aligned} f'(1 + i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1, 1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 1) \\ &= i \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Sendo $z = x + iy$ a função

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= x^2 - y^2 + (x - 1)^2 + i[2xy + (y - 1)^2] \\ &= u(x, y) + iv(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = 2xy + (y - 1)^2$$

Observe que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4x - 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x + 2y - 2$$

Portanto, u , v e suas derivadas são contínuas para qualquer (x, y) , uma vez que são polinomiais. Para que f seja diferenciável num ponto $z = x + iy$, além disso é também necessário que as equações

de Cauchy-Rieman sejam satisfeitas nesse ponto. Assim, deve-se ter

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4x - 2 = 2x + 2y - 2 \\ -2y = -(2y) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = y \\ \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Logo, f é diferenciável em todos os pontos $z = x + iy$ com $x = y$ (bissetriz do primeiro e terceiro quadrantes do plano complexo). Perceba que para nenhum desses pontos é possível estabelecer uma vizinhança formada por pontos em que f é também diferenciável. Logo, não existe z para o qual f seja analítica. $\square$

b). Usando os resultados obtidos no item anterior, tem-se

$$\begin{aligned} f'(1+i) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,1) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1,1) \\ &= 2 + 2i \end{aligned}$$

Exercício 3 Inicialmente observe que a função

$$f(z) = \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}}$$

é contínua em todo o percurso definido pelo caminho C dado pela curva

$$z = 4e^{it}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

Desta forma, a integral dada é independente do caminho escolhido, ou seja

$$\begin{aligned} \int_C \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz &= \int_{z(-\frac{\pi}{2})}^{z(\frac{\pi}{2})} \frac{1}{4z^{\frac{1}{2}}} dz \\ &= \int_{-4i}^{4i} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{4} dz \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{2} \Big|_{-4i}^{4i} \\ &= \frac{(4i)^{\frac{1}{2}} - (-4i)^{\frac{1}{2}}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} \\ &= i\sqrt{2} \end{aligned}$$

Exercício 4

a). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(z - 4 - 3i)^k}{5^{2k}}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(z - 4 - 3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}}$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(z - 4 - 3i)^{k+1}}{5^{2(k+1)}} \frac{5^{2k}}{(z - 4 - 3i)^k} \right| \\ &= \left| \frac{z - 4 - 3i}{5^2} \right| \\ &= \frac{|z - 4 - 3i|}{25} \end{aligned}$$

Segundo o **teste da razão**, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|z - 4 - 3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ \frac{|z - 4 - 3i|}{25} < 1 &\Rightarrow \\ |z - 4 - 3i| < 25 \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = 4 + 3i$ e raio $R = 25$. $\square$

b). O termo geral da série em questão é

$$a_k = \frac{(2k)!}{(k+2)(k!)^2} (z - i)^{2k}$$

e disto, segue-se que

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!}{(k+3)((k+1)!)^2} (z - i)^{(2k+2)}$$

Assim

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| &= \left| \frac{(2k+2)!(z-i)^{(2k+2)}}{(k+3)((k+1)!)^2} \frac{(k+2)(k!)^2}{(2k)!(z-i)^{2k}} \right| \\
 &= \left| \frac{(2k+2)(2k+1)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 (k+2) \right| \\
 &= \left| \frac{2(k+1)(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)^2} (z-i)^2 \right| \\
 &= \left| \frac{2(2k+1)(k+2)}{(k+3)(k+1)} (z-i)^2 \right| \\
 &= 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2
 \end{aligned}$$

Segundo o **teste da razão**, a série dada será convergente para os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 \lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \left| \frac{2k^2 + 5k + 2}{k^2 + 4k + 3} \right| |z-i|^2 &< 1 \Rightarrow \\
 4|z-i|^2 &< 1 \Rightarrow \\
 |z-i|^2 &< \frac{1}{4} \Rightarrow \\
 |z-i| &< \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Assim a série converge no círculo de centro em $z_0 = i$ e raio $R = \frac{1}{2}$. ■

Exercício 5 Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{z^2 - 2z + 2}{z - 2} \\
 &= \frac{z^2 - 2z + 1 - 1 + 2}{z - 2 + 1 - 1} \\
 &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1) - 1} \\
 &= \left[(z-1)^2 + 1 \right] \frac{1}{(z-1) - 1} \\
 &= \frac{(z-1)^2 + 1}{(z-1)} \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\
 &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}}
 \end{aligned}$$

Sabe-se que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{z-1} \right)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n}
 \end{aligned}$$

Desde que

$$\left| \frac{1}{z-1} \right| < 1 \Leftrightarrow 1 < |z-1|$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \frac{1}{1 - \frac{1}{z-1}} \\
 &= \left[(z-1) + (z-1)^{-1} \right] \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^n} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n+1}} \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\
 &= (z-1) + 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(z-1)^{n-1}} \\
 &= 1 + (z-1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{(z-1)^{n-1}}
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof. Edson

1ª Prova

2º Semestre

2017

Data: 25 de Janeiro de 2018

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Calcule*

a). $(64i)^{\frac{5}{4}};$

b). $1 + i + i^2 + \dots + i^{2018}.$

Problema 2 *Sabendo que $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.*

Problema 3 *Determine z sabendo que z , i e iz são vértices de um triângulo equilátero.*

Problema 4 *Considere a esfera de Riemann sendo a esfera de raio unitário e centro na origem. Calcule a projeção do complexo $z = a + bi$ sobre a esfera de Riemann usando a projeção estereográfica.*

Problema 5 *Determine onde a função*

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

é analítica. Justifique sua resposta.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 20 de Fevereiro

2017
Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned}(64i)^{\frac{5}{4}} &= \sqrt[4]{64^5 i^5} \\ &= 64^{\frac{5}{4}} \sqrt[4]{i}\end{aligned}$$

Além disso, tem-se que

$$\begin{aligned}|i| &= 1 \\ \theta &= \text{Arg}(i) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{i} &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3 \\ &= \cos \frac{\pi + 4k\pi}{8} + i \sin \frac{\pi + 4k\pi}{8}\end{aligned}$$

Assim, calculando todas as possibilidades:

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \frac{5\pi}{8} \right) \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right). \quad \text{ou}$$

$$(64i)^{\frac{5}{4}} = 64^{\frac{5}{4}} \left(\cos \frac{13\pi}{8} + i \sin \frac{13\pi}{8} \right).$$

□

b). Deseja-se calcular

$$S = 1 + i + i^2 + \dots + i^{2018}$$

Para isto, observe que tal soma corresponde a uma **progressão geométrica** de razão i . Assim, segue-se que

$$S = \frac{1 - i^{2019}}{1 - i}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}i^{2019} &= i^{504 \times 4 + 3} \\ &= (i^4)^{504} i^3 \\ &= 1^{504} (-i) \\ &= -i\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}S &= \frac{1 + i}{1 - i} \\ &= \frac{1 + i}{1 - i} \frac{1 + i}{1 + i} \\ &= \frac{1 + 2i - 1}{2} \\ &= \frac{2i}{2} \\ &= i\end{aligned}$$

■

Exercício 2 Sabe-se que

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\frac{z^2 + 1}{z} &= 1 \Rightarrow \\ z^2 + 1 &= z \Rightarrow \\ z^2 - z + 1 &= 0\end{aligned}$$

Resolvendo a equação do 2º grau, tem-se

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Assim,

$$|z| = |z_1| = |z_2| = 1$$

■

Exercício 3 Sendo z, i e iz vértices de um triângulo equilátero, segue-se que

$$|z - i| = |z - iz|$$

$$|z - i| = |i - iz|$$

Assim, considerando $z = x + iy$, as equações acima torna-se

$$\begin{cases} |x + iy - i| = |x + iy - ix + y| \\ |x + iy - i| = |i - ix + y| \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = (x + y)^2 + (y - x)^2 \\ x^2 + (y - 1)^2 = y^2 + (1 - x)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 2x - 1 = 0 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \text{ ou } \frac{-\sqrt{3}-1}{2} \\ y = x \end{cases}$$

Portanto

$$z = \frac{\sqrt{3}-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

ou

$$z = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

■

Exercício 4 Sendo a esfera unitária de centro na origem a **Esfera de Riemann**, segue-se que o “norte” desta esfera é o ponto $N = (0, 0, 1)$ e o número complexo $z = a + bi$ visto como um ponto no espaço possui coordenadas $P = (a, b, 0)$. Desta forma, a reta que passa pelos pontos N e P possui uma parametrização possível dada por

$$\begin{aligned} r(t) &= N + (P - N)t \\ &= (0, 0, 1) + (a, b, -1)t \\ &= (at, bt, 1 - t) \end{aligned}$$

com $0 \leq t \leq 1$. Além disso, esta esfera possui equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Assim, a projeção de z sobre a esfera, nada mais é que o ponto da reta r que a toca. Ou seja

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 &= 1 \Rightarrow \\ (at)^2 + (bt)^2 + (1 - t)^2 &= 1 \Rightarrow \\ a^2t^2 + b^2t^2 + 1 - 2t + t^2 &= 1 \Rightarrow \\ a^2t^2 + b^2t^2 - 2t + t^2 &= 0 \Rightarrow \\ (a^2 + b^2 + 1)t^2 - 2t &= 0 \Rightarrow \\ t[(a^2 + b^2 + 1)t - 2] &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$t = 0$$

ou

$$\begin{aligned} t &= \frac{2}{a^2 + b^2 + 1} \\ &= \frac{2}{|z|^2 + 1} \end{aligned}$$

Para $t = 0$ tem-se o ponto N e para $t = \frac{2}{|z|^2 + 1}$, tem-se a projeção procurada:

$$\begin{aligned} r\left(\frac{2}{|z|^2 + 1}\right) &= \left(\frac{2a}{|z|^2 + 1}, \frac{2b}{|z|^2 + 1}, 1 - \frac{2}{|z|^2 + 1}\right) \\ &= \left(\frac{2a}{|z|^2 + 1}, \frac{2b}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right) \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Deseja-se avaliar a analiticidade da função

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

Para isto considere as funções

$$g(z) = z - i$$

e

$$h(z) = \bar{z} - i$$

Observe que g é uma função polinomial e, portanto analítica em todo $\mathbb{C}$. Por outro lado, a função h pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h(z) &= x - iy - i \\ &= x - i(y + 1), \end{aligned}$$

considerando-se $z = x + iy$. Assim, suas partes real e imaginária são

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y - 1 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, as equações de **Cauchy-Riemann** não são válidas para todo z . Disto conclui-se que h não é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Perceba que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e suponha que exista $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . Assim, como g é também analítica em z , segue que g/f também é analítica em z . Mas

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{\frac{g(z)}{h(z)}} = g(z) \frac{h(z)}{g(z)} = h(z)$$

o que é uma contradição, visto que h é não analítica em todo $\mathbb{C}$. Logo, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

2ª Prova

2º Semestre

2017

Data: 15 de Março de 2018

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Escreva cada um dos seguintes números na forma $a + bi$*

a). $e^{2+i\frac{\pi}{4}};$

b). $\sinh(1 + \pi i).$

Problema 2 *Calcule*

a). $(1 + i)^{1+i}$

b). $\text{Ln}(\sqrt{3} + i).$

Problema 3 *Resolva a equação*

$$\text{Ln}(z^2 - 1) = i\frac{\pi}{2}$$

Problema 4 *Calcule*

$$\int_C \bar{z} dz$$

sendo C o círculo $|z| = 2$ percorrido no sentido antihorário.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz$$

sendo C o círculo $|z| = 4$ percorrido duas vezes no sentido horário.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova

Data: Segunda-feira, 19 de Março de 2018

2017

Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned} e^{2+i\frac{\pi}{4}} &= e^2 e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= e^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= e^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{e^2 \sqrt{2}}{2} + i \frac{e^2 \sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned} \sinh(1 + \pi i) &= \frac{e^{1+\pi i} - e^{-1-\pi i}}{2} \\ &= \frac{e(\cos \pi + i \sin \pi) - e^{-1}(\cos \pi - i \sin \pi)}{2} \\ &= \frac{-e + e^{-1}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Observe que

$$\begin{aligned} (1+i)^{1+i} &= e^{(1+i)\text{Ln}(1+i)} \\ &= e^{(1+i)[\ln|1+i| + i\text{Arg}(1+i)]} \\ &= e^{(1+i)[\ln \sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}]} \\ &= e^{(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}) + i(\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2})} \\ &= a + bi \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} a &= e^{(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4})} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \\ b &= e^{(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4})} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \ln \sqrt{2} \right) \end{aligned}$$

□

b). Observe que

$$\begin{aligned} \text{Ln}(\sqrt{3} + i) &= \ln|\sqrt{3} + i| + i\text{Arg}(\sqrt{3} + i) \\ &= \ln 2 + i\frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Perceba que

$$\begin{aligned} \text{Ln}(z^2 - 1) &= i\frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ z^2 - 1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \\ z^2 - 1 &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ z^2 - 1 &= i \Rightarrow \\ z &= \sqrt{1+i} \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2} \left[\cos \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} + k\pi \right) \right] \end{aligned}$$

com $k = 0, 1$. Portanto

$$z = \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{8} \right) \right]$$

ou

$$z = \sqrt[4]{2} \left[\cos \left(\frac{9\pi}{8} \right) + i \sin \left(\frac{9\pi}{8} \right) \right]$$

■

Exercício 4 Inicialmente, observe que a função $f(z) = \bar{z}$ é não analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$ (use as **equações de Cauchy-Riemann** para conferir esta afirmação). Segue-se disto que não é possível utilizar-se o **Teorema de Cauchy-Goursat** para o cálculo da integral dada.

Uma parametrização possível para o círculo $C : |z| = 2$ é dada por

$$z = 2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Assim,

$$\bar{z} = 2e^{-it}$$

$$dz = 2ie^{it}dt$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\int_C \bar{z}dz &= \int_0^{2\pi} 2e^{-it}2e^{it}idt \\ &= \int_0^{2\pi} 4idt \\ &= 8\pi i\end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere C_2 sendo a curva correspondente ao percurso de **uma** volta no círculo $|z| = 4$ no sentido **antihorário**. Uma parametrização possível para C_2 é dada por

$$z = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como C é a curva que corresponde a duas voltas no círculo $|z| = 4$ no sentido antihorário, segue-se que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz = -2 \int_{C_2} \frac{z}{(z+2)(z-1)}dz$$

Além disso, a função

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$$

possui duas singularidades em $z = -2$ e $z = 1$ e ambas estão dentro do círculo $|z| = 4$. Decompondo o círculo C_2 nos semi-círculos C_{2e} (semi-círculo à esquerda) e C_{2d} (semi-círculo à direita) orientados também no sentido antihorário, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} + \\ &+ \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)}\end{aligned}$$

e, usando a primeira fórmula de integral de Cauchy,

$$\begin{aligned}\int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)}{z+2}dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z-1}\right) \Big|_{z=-2} \\ &= \frac{4\pi i}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2d}} \frac{\left(\frac{z}{z+2}\right)}{z-1}dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z+2}\right) \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi i}{3}\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \frac{4\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3} \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_C \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= -2(2\pi i) \\ &= -4\pi i\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2017

Data: 05 de Abril de 2018

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine o disco de convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n$$

Problema 2 *Encontre a série de MacLaurin (todos os termos) e o seu raio de convergência para a função*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

Problema 3 *Calcule os resíduos da função*

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z}$$

em todas as singularidades isoladas. Considere o ramo principal de $z^{\frac{1}{2}}$.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \, d\theta$$

Problema 5 *Calcule*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Sexta-feira, 06 de Abril de 2018

2017
Turma E5

Exercício 1 Sendo a série dada por

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n,$$

observe que seu termo geral é

$$u_n = \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n$$

e

$$u_{n+1} = \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1} \frac{e^n}{\sinh n (z+1)^n} \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} (z+1) \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{2e} \frac{2}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n - e^{-n-2}}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n (1 - e^{-2n-2})}{e^n (1 - e^{-2n})} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1| \end{aligned}$$

Usando o **teste da razão**, tem-se que esta série será convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - \frac{1}{e^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{e^{2n}}} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| < 1$$

Portanto, a série converge absolutamente no disco de centro em $z = -1$ e raio $R = 1$. ■

Exercício 2 Sabe-se da **série geométrica** que

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^n \end{aligned}$$

desde que $|z| < 1$. Além disto, usando a derivada, tem-se que

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1-z} \right) \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} \end{aligned}$$

Usando a derivada novamente, observe que

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1-z)^2} \right] = \frac{2}{(1-z)^3},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)^3} &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{(1-z)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} \right] \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \end{aligned}$$

desde que $|z| < 1$ (disco de convergência). ■

Exercício 3 Perceba que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z^2 - 4z + 4)} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z-2)^2} \end{aligned}$$

Ou seja, a função f possui um **polo não isolado** em $z = 0$, uma vez que a função $z^{\frac{1}{2}}$ não está definida na parte positiva do eixo real (caso considere o argumento principal em $0 < \theta \leq 2\pi$) ou na parte negativa do eixo real (caso considere o argumento principal em $-\pi < \theta \leq \pi$). Em qualquer um dos casos $z = 0$ é um polo não isolado. Além disso, f possui um **polo isolado de ordem 2** em $z = 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2) &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} ((z-2)^2 f(z)) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} \left((z-2)^2 \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z-2)^2} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{z^3}} \right] \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Considere o caminho C , dado por

$$z = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\theta} d\theta \\ &= iz d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ &= \frac{z^2 - 1}{2iz} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sen}^4 \theta &= \left(\frac{z^2 - 1}{2iz} \right)^4 \\ &= \frac{(z^2 - 1)^4}{16z^4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}^4 \theta d\theta &= \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16z^4} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} dz \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5}$$

possui um **polo de ordem 5** em $z = 0$ e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} dz &= 2\pi i \text{Res}(f, 0) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} z^5 f(z) \right] \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{24} \frac{d^4}{dz^4} z^5 \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} \right] \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{24 \cdot 16i} \frac{d^4}{dz^4} (z^2 - 1)^4 \right] \\ &= \frac{2\pi i}{24 \cdot 16i} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{d^4}{dz^4} (z^2 - 1)^4 \right] \\ &= \frac{\pi}{12 \cdot 16} \lim_{z \rightarrow 0} [1680z^4 - 1440z^2 + 144] \\ &= \frac{\pi}{12 \cdot 16} 144 \\ &= \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \text{sen}^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

■

Exercício 5 Para resolver a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2} dx$$

é necessário calcular a integral

$$\int_C \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2} dz$$

sendo C é a borda do semi-círculo de raio r e centro na origem cuja parametrização pode ser dada por

$$C = C_r \cup \gamma$$

com C sendo

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

e γ

$$z = t, -r \leq t \leq r$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2}$$

possui dois polos de ordem 2 em $z = 2i$ (estão dentro de C) e dois polos de ordem 2 em $z = -2i$ (estão fora de C). Assim, pelo **Teorema dos Resíduos**, tem-se que

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, 2i)$$

Porém,

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{C_r} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= 0 + \int_{-r}^r \frac{e^{it} dt}{(t^2 + 4)^2} \\ &= \int_{-r}^r \frac{\cos t dt}{(t^2 + 4)^2} + i \int_{-r}^r \frac{\sin t dt}{(t^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 2i) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{d}{dz} (z - 2i) f(z) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{d}{dz} (z - 2i) \frac{e^{iz}}{(z^2 + 4)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z + 2i)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left[\frac{ie^{iz} (z + 2i)^2 - 2e^{iz} (z + 2i)}{(z + 2i)^4} \right] \\ &= \frac{-24ie^{-2}}{256} \\ &= \frac{-3i}{32e^2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_{-r}^r \frac{\cos t dt}{(t^2 + 4)^2} + i \int_{-r}^r \frac{\sin t dt}{(t^2 + 4)^2} = 2\pi i \frac{-3i}{32e^2} \Rightarrow$$

$$\int_{-r}^r \frac{\cos t dt}{(t^2 + 4)^2} + i \int_{-r}^r \frac{\sin t dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

e disto segue-se que

$$\int_{-r}^r \frac{\cos t dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\cos t dt}{(t^2 + 4)^2} = \frac{3\pi}{16e^2}$$

Observe agora que a função

$$f(x) = \frac{\cos x}{(x^2 + 4)^2}$$

é par e disto segue-se que

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2}$$

ou seja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2 + 4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{3\pi}{16e^2} \\ &= \frac{3\pi}{32e^2} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

Prova Final

2º Semestre

2017

Data: 12 de Abril de 2018

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Escreva o número complexo abaixo na forma $a + bi$*

$$(1 + i)^n + (1 - i)^n$$

onde $n \in \mathbb{N}$.

Problema 2 *Considere a função*

$$f(z) = xy^2 + ix^2y$$

com $z = x + iy$. *Encontre a região do plano complexo onde*

- a). *as equações de **Cauchy-Riemann** são satisfeitas*
- b). *a função é diferenciável*
- c). *a função é analítica*

Problema 3 *Encontre todas as raízes da equação*

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_C \frac{1}{1 + z^4} dz$$

sendo C a curva dada pela equação $x^2 + y^2 = 2x$ com $z = x + iy$, percorrida no sentido antihorário.

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1 + x^8} dx$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sábado, 14 de Abril de 2018

2017
Turma E5

Exercício 1 Inicialmente observe que

$$\begin{aligned} 1 + i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + i \sin \frac{-\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 + i)^n &= \left(\sqrt{2} \right)^n e^{i \frac{n\pi}{4}} \\ (1 - i)^n &= \left(\sqrt{2} \right)^n e^{-i \frac{n\pi}{4}} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} (1 + i)^n + (1 - i)^n &= \left(\sqrt{2} \right)^n e^{i \frac{n\pi}{4}} + \left(\sqrt{2} \right)^n e^{-i \frac{n\pi}{4}} \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^n \left(e^{i \frac{n\pi}{4}} + e^{-i \frac{n\pi}{4}} \right) \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^n 2 \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \\ &= 2 \left(\sqrt{2} \right)^n \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Exercício 2 Sendo

$$f(z) = xy^2 + ix^2y$$

tem-se que

$$u(x, y) = xy^2$$

$$v(x, y) = x^2y$$

são as partes real e imaginária de f , respectivamente.

Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x^2$$

Então, para que as equações de **Cauchy-Riemann** estejam satisfeitas, é necessário que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y^2 = x^2 \\ 2xy = -2xy \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $(x, y) = (0, 0)$ como única solução. Portanto,

a). As equações de **Cauchy-Riemann** são satisfeitas apenas em $(0, 0)$. $\square$

b). Como as equações de **Cauchy-Riemann** são satisfeitas apenas em $(0, 0)$, segue-se que este ponto é o único local onde a função pode ser diferenciável. Para confirmar isto, observe que u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são contínuas em $(0, 0)$ e isto garante a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$. Ou seja $(0, 0)$ é o único local onde f é diferenciável. $\square$

■

c). Novamente, como $(0, 0)$ é o único ponto onde f é diferenciável e esta é uma condição necessária para a analiticidade de f num ponto, segue-se que $(0, 0)$ é o único candidato à analiticidade. Porém, também é necessário que exista uma vizinhança em torno deste ponto que também seja diferenciável. Como não existe tal vizinhança, segue-se que f é não analítica em todo o $\mathbb{C}$. $\blacksquare$

Exercício 3 Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin z \cos \frac{\pi}{4} - \cos z \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin z - \cos z) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z - \cos z &= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{sen} \left(z - \frac{\pi}{4} \right)\end{aligned}$$

Logo, a equação dada

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) &= 3 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen} \left(z - \frac{\pi}{4} \right) &= \frac{3}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}z - \frac{\pi}{4} &= \arcsen \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{\pi}{4} + \arcsen \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}$$

Lembrando que

$$\arcsen z = -i \ln \left[iz + \sqrt{1 - z^2} \right]$$

Segue-se que

$$\begin{aligned}z &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \left[\log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right|\end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 4 Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 2x \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 &= 0 \Leftrightarrow \\ (x - 1)^2 + y^2 &= 1 \Leftrightarrow \\ |z - 1| &= 1\end{aligned}$$

uma vez que $z = x + iy$. Além disso, os polos da função

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^4}$$

são soluções da equação

$$\begin{aligned}1 + z^4 &= 0 \Leftrightarrow \\ z &= \sqrt[4]{-1}\end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned}z_0 &= e^{i\frac{\pi}{4}} \\ z_1 &= e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\ z_2 &= e^{i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{5\pi}{4}} \\ z_3 &= e^{i\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{i\frac{7\pi}{4}}\end{aligned}$$

Destes, apenas z_0 e z_3 encontram-se dentro do círculo C de equação $|z - 1| = 1$. Logo, pelo **Teorema dos Resíduos**, segue-se que

$$\int_C \frac{dz}{1 + z^4} = 2\pi i [\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_3)]$$

Onde

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_0) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_0} \\ &= \frac{1}{4 \left(e^{i\frac{\pi}{4}} \right)^3} \\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_3) &= \frac{1}{4z^3} \Big|_{z=z_3} \\ &= \frac{1}{4 \left(e^{i\frac{7\pi}{4}} \right)^3} \\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{21\pi}{4}}} \\ &= \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi i \left(\frac{1}{4e^{i\frac{3\pi}{4}}} + \frac{1}{4e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) \\
 &= \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\frac{3\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}} \right) \\
 &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{3\pi}{4}}}{e^{i\pi}} \right) \\
 &= \frac{\pi i}{2} \left(\frac{\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}}{-1} \right) \\
 &= -\frac{\pi i}{2} \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Para resolver a integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{1+x^8} dx$$

é necessário calcular a integral

$$\int_C \frac{z^4}{1+z^8} dz$$

sendo C é a borda do semi-círculo de raio r e centro na origem cuja parametrização pode ser dada por

$$C = C_r \cup \gamma$$

com C sendo

$$z = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$$

e γ

$$z = t, -r \leq t \leq r$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{z^4}{1+z^8}$$

possui oito polos simples obtidos como soluções da equação

$$\begin{aligned}
 1 + z^8 &= 0 \Leftrightarrow \\
 z &= \sqrt[8]{-1}
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
 z_0 &= e^{i\frac{\pi}{8}} \\
 z_1 &= e^{i(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{3\pi}{8}} \\
 z_2 &= e^{i(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{5\pi}{8}} \\
 z_3 &= e^{i(\frac{5\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{7\pi}{8}} \\
 z_4 &= e^{i(\frac{7\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{9\pi}{8}} \\
 z_5 &= e^{i(\frac{9\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{11\pi}{8}} \\
 z_6 &= e^{i(\frac{11\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{13\pi}{8}} \\
 z_7 &= e^{i(\frac{13\pi}{8} + \frac{\pi}{4})} = e^{i\frac{15\pi}{8}}
 \end{aligned}$$

Destas, apenas z_0, z_1, z_2 e z_3 encontram-se dentro da curva C . Assim, pelo **Teorema dos Resíduos**, tem-se que

$$\int_C \frac{z^4}{1+z^8} dz = 2\pi i \sum_{k=0}^3 \text{Res}(f, z_k)$$

com

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_0) &= \frac{z^4}{8z^7} \Big|_{z=z_0} \\
 &= \frac{1}{8z_0^3} \\
 &= \frac{1}{8e^{i\frac{3\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_1) &= \frac{z^4}{8z^7} \Big|_{z=z_1} \\
 &= \frac{1}{8z_1^3} \\
 &= \frac{1}{8e^{i\frac{9\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_2) &= \frac{z^4}{8z^7} \Big|_{z=z_2} \\
 &= \frac{1}{8z_2^3} \\
 &= \frac{1}{8e^{i\frac{15\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_3) &= \left. \frac{z^4}{8z^7} \right|_{z=z_3} \\
 &= \frac{1}{8z_3^3} \\
 &= \frac{1}{8e^{i\frac{21\pi}{8}}} \\
 &= \frac{1}{8e^{i\frac{5\pi}{8}}}
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{z^4}{1+z^8} dz &= 2\pi i \sum_{k=0}^3 \text{Res}(f, z_k) \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{8e^{i\frac{3\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{9\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{15\pi}{8}}} + \frac{1}{8e^{i\frac{5\pi}{8}}} \right) \\
 &= \frac{2\pi i}{8} \left(e^{-i\frac{3\pi}{8}} + e^{-i\frac{9\pi}{8}} + e^{-i\frac{15\pi}{8}} + e^{-i\frac{5\pi}{8}} \right) \\
 &= \frac{\pi i}{4} \left(2i \sin \frac{\pi}{8} - 2i \sin \frac{3\pi}{8} \right) \\
 &= \frac{-\pi}{2} \left(\sin \frac{\pi}{8} - \sin \frac{3\pi}{8} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)
 \end{aligned}$$

e disto, segue-se

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{z^4}{1+z^8} dz &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \\
 \int_{\gamma} \frac{z^4}{1+z^8} dz + \int_{C_r} \frac{z^4}{1+z^8} dz &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \\
 \int_{-r}^r \frac{t^4}{1+t^8} dt &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \\
 \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{t^4}{1+t^8} dt &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right) \Rightarrow \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^4}{1+t^8} dt &= \frac{\pi}{2} \left(\sin \frac{3\pi}{8} - \sin \frac{\pi}{8} \right)
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

1ª Prova

2º Semestre

2019

Data: 31 de Outubro de 2019

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Calcule*

a). $\left| \frac{(1+i)^6}{(2+3i)^2} \right|$

b). $\left(\frac{4-4i}{2+2i} \right)^7 + \left(\frac{4-4i}{2-2i} \right)^7$

Problema 2 *Sendo k um número real e sabendo que*

$$\operatorname{Im} \left(\frac{2+2i}{k+i} \right) = 0$$

Calcule o valor k .

Problema 3 *Encontre dois números complexos tais que o seu produto é 2 e a diferença entre eles é i .*

Problema 4 *Calcule o limite*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1+z)^{\frac{1}{3}} - (1-z)^{\frac{1}{3}}}{z}$$

Problema 5 *Resolva a equação*

$$z^6 + z^3 + 1 = 0$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Quinta-feira, 5 de Dezembro

2019
Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$\begin{aligned} \left| \frac{(1+i)^6}{(2+3i)^2} \right| &= \frac{|1+i|^6}{|2+3i|^2} \\ &= \frac{(\sqrt{2})^6}{(\sqrt{13})^2} \\ &= \frac{8}{13} \end{aligned}$$

□

b). Deseja-se calcular

$$A = \left(\frac{4-4i}{2+2i} \right)^7 + \left(\frac{4-4i}{2-2i} \right)^7$$

Para isto, observe que

$$\begin{aligned} \frac{4-4i}{2+2i} &= \frac{4-4i}{2+2i} \cdot \frac{2-2i}{2-2i} \\ &= \frac{8-8i-8i-8}{8} \\ &= \frac{-16i}{8} \\ &= -2i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{4-4i}{2-2i} &= \frac{4-4i}{2-2i} \cdot \frac{2+2i}{2+2i} \\ &= \frac{8+8i-8i+8}{8} \\ &= \frac{16}{8} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} A &= (-2i)^7 + 2^7 \\ &= 128 + 128i \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned} \frac{2+2i}{k+i} &= \frac{2+2i}{k+i} \cdot \frac{k-i}{k-i} \\ &= \frac{2k-2i+2ki+2}{k^2+1} \\ &= \frac{2k+2+(2k-2)i}{k^2+1} \\ &= \frac{2k+2}{k^2+1} + \frac{2k-2}{k^2+1}i \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\frac{2+2i}{k+i} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{2k-2}{k^2+1} &= 0 \Rightarrow \\ k &= 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Considere $z = a + bi$ e $w = c + di$ tais que

$$zw = 2$$

$$z - w = i$$

Segue-se da segunda equação que

$$z = w + i$$

e substituindo na primeira equação tem-se

$$(w+i)w = 2$$

ou seja,

$$w^2 + iw - 2 = 0$$

Resolvendo esta equação, obtém-se

$$w = \frac{-i \pm \sqrt{-1+8}}{2}$$

Ou seja

$$w = \frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i$$

ou

$$w = -\frac{\sqrt{7}}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$z = -\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{1}{2}i$$

■

Exercício 4 Inicialmente observe que

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Considerando

$$a = \sqrt[3]{1+z}$$

$$b = \sqrt[3]{1-z}$$

e substituindo na expressão anterior, obtem-se

$$2z = (\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z}) \left(\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2} \right)$$

Ou seja

$$\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z} = \frac{2z}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}}$$

Portanto

$$B = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z}}{z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \frac{2z}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt[3]{(1+z)^2} + \sqrt[3]{1-z^2} + \sqrt[3]{(1-z)^2}}$$

$$= \frac{2}{3}$$

■

Exercício 5 Considere

$$w = z^3$$

e perceba que a equação dada pode ser reescrita como

$$w^2 + w + 1 = 0$$

Donde segue-se que

$$w = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

Ou seja

$$w_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

Disto segue-se que

$$z = \sqrt[3]{w_1}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right)$$

com $k = 0, 1, 2$, ou seja

$$z_1 = \cos \left(\frac{2\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{9} \right)$$

$$z_2 = \cos \left(\frac{8\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{8\pi}{9} \right)$$

$$z_3 = \cos \left(\frac{14\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{14\pi}{9} \right)$$

ou

$$z = \sqrt[3]{w_2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[\cos \left(-\frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{3} \right) \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \cos \left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \right)$$

com $k = 0, 1, 2$, ou seja

$$z_4 = \cos \left(-\frac{2\pi}{9} \right) + i \sin \left(-\frac{2\pi}{9} \right)$$

$$z_5 = \cos \left(\frac{4\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{9} \right)$$

$$z_6 = \cos \left(\frac{10\pi}{9} \right) + i \sin \left(\frac{10\pi}{9} \right)$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

2ª Prova

2º Semestre

2019

Data: 19 de Dezembro

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Resolva as equações*

a). $e^z = 2i$

b). $(\operatorname{Ln} z)^2 + \operatorname{Ln} z = -1$

Problema 2 *Considere a função*

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

a). *Determine para quais valores de z a função f possui derivada.*

b). *Calcule $f'(1 + i)$.*

Problema 3 *Determine os valores de z para os quais a função*

$$f(z) = \operatorname{cotgh} z$$

é puramente real.

Problema 4 *Encontre uma função analítica $f(z)$ cuja parte real seja*

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$$

e $f(i) = 1 + i$.

Problema 5 *Determine para quais valores de z a função*

$$f(z) = z \operatorname{Re}(z)$$

é analítica.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Sexta-feira, 20 de Dezembro

2019
Turma E5

Exercício 1

a). Observe que

$$e^z = 2i \Rightarrow$$

$$z = \ln 2i$$

$$= \ln |2i| + \arg(2i)$$

$$= \ln 2 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), k \in \mathbb{Z}$$

□

b). Considerando

$$w = \operatorname{Ln} z,$$

segue-se que

$$w^2 + w + 1 = 0$$

Ou seja,

$$w = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Portanto

$$\operatorname{Ln} z = w \Rightarrow$$

$$z = e^w$$

$$= e^{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \pm i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

■

Exercício 2 Considere

$$z = x + iy$$

e observe que

$$f(z) = z^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$

$$= (x+iy)^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$

$$= x^2 + 2xyi - y^2 + (x-1)^2 + i(y-1)^2$$

$$= [x^2 - y^2 + (x-1)^2] + [(y-1)^2 + 2xy] i$$

Ou seja, as partes real e imaginária de f são, respectivamente

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + (x-1)^2$$

$$v(x, y) = (y-1)^2 + 2xy$$

a). Para que f seja derivável em z é necessário que as equações de **Cauchy-Riemann** sejam satisfeitas em z ,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Ou seja

$$\begin{cases} 2x + 2(x-1) = 2(y-1) + 2x \\ -2y = -2y \end{cases} \Rightarrow x = y$$

Portanto, f é derivável para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $z = x + ix = x(1+i)$. □

b). A derivada de f em z é dada por

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= (4x-2) + 2yi \end{aligned}$$

e disto segue-se que

$$f'(1+i) = 2 + 2i$$

■

Exercício 3 É necessário inicialmente, determinar as partes real e imaginária da função f . Para isto, observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= \operatorname{cotgh} z \\ &= \frac{\cosh z}{\sinh z} \\ &= \frac{\frac{e^z + e^{-z}}{2}}{\frac{e^z - e^{-z}}{2}} \\ &= \frac{e^z + e^{-z}}{2} \frac{2}{e^z - e^{-z}} \\ &= \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \end{aligned}$$

Considerando $z = x + iy$ tem-se que

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= e^{x+iy} + e^{-x-iy} \\ &= e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) + e^{-x} (\cos y - i \sin y) \\ &= (e^x + e^{-x}) \cos y + (e^x - e^{-x}) i \sin y \\ &= 2 \cosh x \cos y + 2i \sinh x \sin y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} e^z - e^{-z} &= e^{x+iy} - e^{-x-iy} \\ &= e^x e^{iy} - e^{-x} e^{-iy} \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) - e^{-x} (\cos y - i \sin y) \\ &= (e^x - e^{-x}) \cos y + (e^x + e^{-x}) i \sin y \\ &= 2 \sinh x \cos y + 2i \cosh x \sin y \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{2 \cosh x \cos y + 2i \sinh x \sin y}{2 \sinh x \cos y + 2i \cosh x \sin y} \\ &= \frac{\cosh x \cos y + i \sinh x \sin y}{\sinh x \cos y + i \cosh x \sin y} \\ &= \frac{\sinh x \cosh x - i \sin y \cos y}{\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y} \end{aligned}$$

Logo,

$$\operatorname{Im}(f(z)) = \frac{\sin y \cos y}{\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y}$$

e, para que a função f seja puramente real é necessário que

$$\operatorname{Im}(f(z)) = 0$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \frac{\sin y \cos y}{\sinh^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \sin^2 y} &= 0 \Rightarrow \\ \sin y \cos y &= 0 \Rightarrow \\ \sin y = 0 \text{ ou } \cos y &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou

$$y = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Com isto, segue-se que $f(z)$ será puramente real se

$$z = x + ik\pi$$

ou

$$z = x + i \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$

Exercício 4 Se a função f é analítica em z , segue-se que as equações de **Cauchy-Riemann** são válidas em z . Ou seja

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

O que implica em

$$\begin{cases} -6xy = \frac{\partial v}{\partial y} \\ 3y^2 - 3x^2 = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy \end{cases}$$

Integrando a segunda equação deste sistema em relação a y , obtem-se

$$v(x, y) = -3xy^2 + k(x)$$

e derivando esta última expressão com relação a x , tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + k'(x)$$

Comparando esta derivada parcial com a mesma, presente no sistema inicial, conclui-se que

$$-3y^2 + k'(x) = 3x^2 - 3y^2$$

Ou seja,

$$k'(x) = 3x^2$$

Donde segue-se que

$$k(x) = x^3 + c, c \in \mathbb{R}$$

e

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -3xy^2 + k(x) \\ &= -3xy^2 + x^3 + c \end{aligned}$$

Como

$$f(i) = 1 + i \Rightarrow v(0, 1) = 1 \Rightarrow c = 1$$

Portanto

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 1$$

e

$$\begin{aligned} f(z) &= u(x, y) + i v(x, y) \\ &= (y^3 - 3x^2 y) + i (x^3 - 3xy^2 + 1) \end{aligned}$$

Exercício 5 *Considere*

$$z = x + iy$$

e observe que

$$\operatorname{Re}(z) = x$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} f(z) &= z \operatorname{Re}(z) \\ &= (x + iy)x \\ &= x^2 + ixy \end{aligned}$$

e as partes real e imaginária de f são, respectivamente

$$u(x, y) = x^2$$

$$v(x, y) = xy$$

Para que f seja analítica em z é necessário que as equações de **Cauchy-Riemann** sejam satisfeitas, ou

seja

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x = x \\ 0 = -y \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, f é diferenciável apenas em $z = 0$, o que implica dizer que f é não analítica em todo $\mathbb{C}$ uma vez que para isso é necessária a diferenciabilidade no ponto e em sua vizinhança. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2019

Data: 06 de Fevereiro de 2020

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz$$

onde γ é círculo unitário percorrido no sentido antihorário.

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} \frac{\cosh^2 z}{(z - 1 - i)z^2} dz$$

onde γ é o círculo $|z| = 3$.

Problema 3 *Determine o disco de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Problema 4 *Encontre a série de MacLaurin e o seu raio de convergência para a função*

$$f(z) = \frac{4z - 1}{z^4 - 1}$$

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} \operatorname{tg}(\pi z) dz$$

onde γ é o círculo $|z| = 2$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Quinta-feira, 6 de Fevereiro

2019
Turma E5

Exercício 1 Observe que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= \int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z} dz\end{aligned}$$

e que a função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$$

não é analítica apenas em $z = 0$. Como este ponto está dentro do círculo unitário descrito por γ , segue-se da **primeira fórmula integral de Cauchy** que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= 2\pi i (z^2 + 1) \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

Outro Modo:

Uma parametrização possível para o círculo unitário com centro na origem e percorrido no sentido anti-horário é dada por

$$z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e disto segue-se que

$$dz = ie^{it} dt$$

Portanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it}) ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i (e^{2it} + 1) dt \\ &= i \left(\frac{e^{2it}}{2i} + t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= i \left[\left(\frac{e^{4\pi i}}{2i} + 2\pi \right) - \left(\frac{1}{2i} \right) \right] \\ &= i \left[\frac{1}{2i} + 2\pi - \frac{1}{2i} \right] \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

Exercício 2 Observe que $z_0 = 1 + i$ e $z_1 = 0$ são polos de ordem 1 e 2, respectivamente, da função

$$f(z) = \frac{\cosh^2 z}{(z - 1 - i)z^2}$$

e ambos estão localizados no interior da curva $\gamma : |z| = 3$. Considere γ_0 sendo uma curva fechada tendo z_0 em seu interior e γ_1 outra curva fechada tendo z_1 em seu interior. Segue-se do **teorema da deformação de contornos**, que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_0} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz$$

e, usando a **1ª fórmula integral de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_0} f(z) dz &= \int_{\gamma_0} \frac{\left(\frac{\cosh^2 z}{z^2} \right)}{(z - 1 - i)} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{\cosh^2 z}{z^2} \right) \Big|_{z=z_0} \\ &= 2\pi i \left(\frac{\cosh^2 z}{z^2} \right) \Big|_{z=1+i} \\ &= 2\pi i \frac{\cosh^2(1+i)}{(1+i)^2} \\ &= \pi \cosh^2(1+i)\end{aligned}$$

Usando a **2ª fórmula integral de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} f(z) dz &= \int_{\gamma_1} \frac{\left(\frac{\cosh^2 z}{z-1-i} \right)}{z^2} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{\cosh^2 z}{z-1-i} \right)' \Big|_{z=z_1} \\ &= 2\pi i \frac{2 \cosh z \sinh z (z-1-i) - \cosh^2 z}{(z-1-i)^2} \Big|_{z=0} \\ &= -\pi\end{aligned}$$



Portanto

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\cosh^2 z}{(z-1-i)z^2} dz &= \pi \cosh^2(1+i) - \pi \\ &= \pi [\cosh^2(1+i) - 1] \\ &= \pi \sinh^2(1+i)\end{aligned}$$

■

Exercício 3 De acordo com a série dada tem-se que

$$a_n = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \frac{(2n)!}{(-1)^n z^{2n}} \right| \\ &= \left| \frac{(-1)z^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| \\ &= \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)}\end{aligned}$$

Para que a série seja convergente em z , é necessário que

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &< 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} &< 1 \Rightarrow \\ 0 &< 1\end{aligned}$$

Ou seja, a série converge para quaisquer valores de z . Em outras palavras, o disco de convergência é

$$|z| < \infty$$

Outro Modo.:

Observe que

$$\begin{aligned}\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Ou seja, a série dada é, na verdade a expansão da função $\cos z$ como série de Taylor em torno de $z=0$ e como a função $\cos z$ é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, segue-se que a série dada é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Exercício 4 Observe que

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{4z-1}{z^4-1} \\ &= \frac{4z-1}{-(1-z^4)} \\ &= \frac{1-4z}{1-z^4} \\ &= (1-4z) \frac{1}{1-z^4}\end{aligned}$$

Usando a série geométrica, tem-se que

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z^4} &= 1 + z^4 + z^8 + z^{12} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n}\end{aligned}$$

para $|z^4| < 1$, ou seja, $|z| < 1$. Portanto, segue-se que

$$\begin{aligned}f(z) &= (1-4z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} - 4z \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} z^{4n} - \sum_{n=0}^{+\infty} 4z^{4n+1} \\ &= 1 - 4z + z^4 - 4z^5 + z^8 - 4z^9 + \dots\end{aligned}$$

para $|z| < 1$. ■

Exercício 5 Observe que

$$\int_{\gamma} \operatorname{tg}(\pi z) dz = \int_{\gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} dz$$

e

$$\begin{aligned}\cos(\pi z) &= 0 \Leftrightarrow \\ \pi z &= \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \\ z &= \frac{1}{2} + k\end{aligned}$$

com $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, a função

$$f(z) = \operatorname{tg}(\pi z)$$

possui 4 polos simples dentro do círculo $\gamma : |z| = 2$.

São eles

$$z_0 = -\frac{3}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \frac{1}{2}$$

$$z_3 = \frac{3}{2}$$

Calculando os resíduos em cada um desses polos tem-se

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{3}{2}} \left(z + \frac{3}{2} \right) \text{tg}(\pi z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\left(z + \frac{3}{2} \right) \text{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{3}{2}} \frac{\text{sen}(\pi z) + \pi \left(z + \frac{3}{2} \right) \cos(\pi z)}{-\pi \text{sen}(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \left(z + \frac{1}{2} \right) \text{tg}(\pi z) \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\left(z + \frac{1}{2} \right) \text{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(\pi z) + \pi \left(z + \frac{1}{2} \right) \cos(\pi z)}{-\pi \text{sen}(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \left(z - \frac{1}{2} \right) \text{tg}(\pi z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\left(z - \frac{1}{2} \right) \text{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\text{sen}(\pi z) + \pi \left(z - \frac{1}{2} \right) \cos(\pi z)}{-\pi \text{sen}(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} \left(z - \frac{3}{2} \right) \text{tg}(\pi z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{\left(z - \frac{3}{2} \right) \text{sen}(\pi z)}{\cos(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{\text{sen}(\pi z) + \pi \left(z - \frac{3}{2} \right) \cos(\pi z)}{-\pi \text{sen}(\pi z)} \\ &= -\frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Assim, pelo **Teorema dos Resíduos**, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \text{tg}(\pi z) dz &= 2\pi i \sum_{i=0}^3 \text{Res}(f, z_i) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{4}{\pi} \right) \\ &= -8i \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

Prova Final

2º Semestre

2019

Data: 11 de Fevereiro de 2020

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine dois números complexos tais que um é conjugado do outro, o módulo de sua soma é 1 e a soma de seus módulos é 2.*

Problema 2 *Encontre todas as raízes da equação*

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Problema 3 *Determine onde a função*

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

é analítica. Justifique sua resposta.

Problema 4 *Calcule*

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz$$

sendo C o círculo $|z| = 4$ percorrido duas vezes no sentido horário.

Problema 5 *Determine o disco de convergência da série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quarta-feira, 12 de Fevereiro

2019
Turma E5

Problema 1 *Sejam $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ os números complexos que deseja-se encontrar. Como um deve ser o conjugado do outro, conforme diz o enunciado do problema, considere*

$$\mathbf{u} = a + bi$$

$$\mathbf{v} = a - bi$$

Além disso, deve-se ter

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = 1 \Rightarrow$$

$$a + bi + a - bi = 1 \Rightarrow$$

$$2a = 1 \Rightarrow$$

$$a = \frac{1}{2}$$

e

$$|\mathbf{u}| + |\mathbf{v}| = 2 \Rightarrow$$

$$2\sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Rightarrow$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow$$

$$b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

e

$$\mathbf{v} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Problema 2 *Observe inicialmente que*

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= \operatorname{sen} z \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos z \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\operatorname{sen} z - \cos z) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} z - \cos z &= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

Logo, a equação dada

$$\operatorname{sen} z - \cos z = 3$$

Pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= 3 \Leftrightarrow \\ \operatorname{sen}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} z - \frac{\pi}{4} &= \arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow \\ z &= \frac{\pi}{4} + \arcsen\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\arcsen z = -i \ln \left[iz + \sqrt{1 - z^2} \right]$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} z &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \ln \left[i \left(\frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - i \left[\log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \right] \\ &= \frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \log_e \left| \frac{3 \pm \sqrt{7}}{\sqrt{2}} \right| \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.

Problema 3 *Deseja-se avaliar a analiticidade da função*

$$f(z) = \frac{z - i}{\bar{z} - i}$$

Para isto considere as funções

$$g(z) = z - i$$

e

$$h(z) = \bar{z} - i$$

Observe que g é uma função polinomial e, portanto analítica em todo $\mathbb{C}$. Por outro lado, a função h pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} h(z) &= x - iy - i \\ &= x - i(y + 1), \end{aligned}$$

considerando-se $z = x + iy$. Assim, suas partes real e imaginária são

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x \\ v(x, y) &= -y - 1 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Em outras palavras, as equações de **Cauchy-Riemann** não são válidas para todo z . Disto conclui-se que h não é analítica para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Perceba que

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

e suponha que exista $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . Assim, como g é também analítica em z , segue que g/f também é analítica em z . Mas

$$\frac{g(z)}{f(z)} = \frac{g(z)}{\frac{g(z)}{h(z)}} = g(z) \frac{h(z)}{g(z)} = h(z)$$

o que é uma contradição, visto que h é não analítica em todo $\mathbb{C}$. Logo, não existe $z \in \mathbb{C}$ tal que f seja analítica em z . ■

Problema 4 Considere C_2 sendo a curva correspondente ao percurso de **uma** volta no

círculo $|z| = 4$ no sentido **antihorário**. Uma parametrização possível para C_2 é dada por

$$z = 4e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Como C é a curva que corresponde a duas voltas no círculo $|z| = 4$ no sentido antihorário, segue-se que

$$\int_C \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz = -2 \int_{C_2} \frac{z}{(z+2)(z-1)} dz$$

Além disso, a função

$$f(z) = \frac{z}{(z+2)(z-1)}$$

possui duas singularidades em $z = -2$ e $z = 1$ e ambas estão dentro do círculo $|z| = 4$. Decompondo o círculo C_2 nos semi-círculos C_{2e} (semi-círculo à esquerda) e C_{2d} (semi-círculo à direita) orientados também no sentido antihorário, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} + \\ &+ \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} \end{aligned}$$

e, usando a primeira fórmula de integral de Cauchy,

$$\begin{aligned} \int_{C_{2e}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2e}} \frac{\left(\frac{z}{z-1}\right)}{z+2} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z-1}\right) \Big|_{z=-2} \\ &= \frac{4\pi i}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_{2d}} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \int_{C_{2d}} \frac{\left(\frac{z}{z+2}\right)}{z-1} dz \\ &= 2\pi i \left(\frac{z}{z+2}\right) \Big|_{z=1} \\ &= \frac{2\pi i}{3} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{C_2} \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= \frac{4\pi i}{3} + \frac{2\pi i}{3} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_C \frac{zdz}{(z+2)(z-1)} &= -2(2\pi i) \\ &= -4\pi i\end{aligned}$$

■

Problema 5 Sendo a série dada por

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n,$$

observe que seu termo geral é

$$u_n = \frac{\sinh n}{e^n} (z+1)^n$$

e

$$u_{n+1} = \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e^{n+1}} (z+1)^{n+1} \frac{e^n}{\sinh n (z+1)^n} \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} (z+1) \right| \\ &= \left| \frac{\sinh(n+1)}{e \sinh n} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^{n+1} - e^{-n-1}}{2e} \frac{2}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n - e^{-n-2}}{e^n - e^{-n}} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{e^n (1 - e^{-2n-2})}{e^n (1 - e^{-2n})} \right| |z+1| \\ &= \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1|\end{aligned}$$

Usando o **teste da razão**, tem-se que esta série será convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - e^{-2n-2}}{1 - e^{-2n}} \right| |z+1| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1 - \frac{1}{e^{2n+2}}}{1 - \frac{1}{e^{2n}}} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$|z+1| < 1$$

Portanto, a série converge absolutamente no disco de centro em $z = -1$ e raio $R = 1$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

1^a Prova

2^o Semestre

2020

Data: 09 de Setembro de 2021

Duração: 16:00 - 18:15

Problema 1 Considere $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Calcule

$$\operatorname{Re} \left(\frac{|z| - iz}{|z| + iz} \right)$$

Problema 2 Calcule

$$\left| \frac{(\pi + i)^{100}}{(\pi - i)^{100}} \right|$$

Problema 3 Determine o valor de $\theta \in \mathbb{R}$ para que o número complexo

$$\frac{i - 1}{\operatorname{tg} \theta + i}$$

esteja sobre a bissetriz do primeiro quadrante do plano de *Argand-Gauss*.

Problema 4 Encontre *todas* as soluções da equação

$$z^2 + |z| = 0$$

Problema 5 Calcule o limite

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{iz^3 + 1}{z^2 + 1}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Quinta-feira, 14 de Outubro de 2021

2020
Turma E5

Exercício 1 Considere

$$w = \frac{|z| - iz}{|z| + iz}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \frac{\overline{|z| - iz}}{\overline{|z| + iz}} \\ &= \frac{\overline{|z|} - \bar{i}\bar{z}}{\overline{|z|} + \bar{i}\bar{z}} \\ &= \frac{|z| - \bar{i}\bar{z}}{|z| + \bar{i}\bar{z}} \\ &= \frac{|z| + i\bar{z}}{|z| - i\bar{z}}\end{aligned}$$

Além disso, sabe-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(w) &= \frac{w + \bar{w}}{2} \\ &= \frac{\frac{|z| - iz}{|z| + iz} + \frac{|z| + i\bar{z}}{|z| - i\bar{z}}}{2} \\ &= \frac{(|z| - iz)(|z| - i\bar{z}) + (|z| + i\bar{z})(|z| + iz)}{2(|z| + iz)(|z| - i\bar{z})} \\ &= \frac{2|z|^2 - 2z\bar{z}}{2(|z| + iz)(|z| - i\bar{z})} \\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 2 Inicialmente, perceba que Usando as

propriedades do módulo complexo, segue-se que

$$\begin{aligned}\left| \frac{(\pi + i)^{100}}{(\pi - i)^{100}} \right| &= \frac{|(\pi + i)^{100}|}{|(\pi - i)^{100}|} \\ &= \frac{|\pi + i|^{100}}{|\pi - i|^{100}} \\ &= \frac{(|\pi + i|^2)^{50}}{(|\pi - i|^2)^{50}} \\ &= \left(\frac{\pi^2 + 1}{\pi^2 + 1} \right)^{50} \\ &= 1^{50} \\ &= 1\end{aligned}$$

■

Exercício 3 Considere

$$\begin{aligned}w &= \frac{i - 1}{\operatorname{tg} \theta + i} \\ &= \frac{i - 1}{\operatorname{tg} \theta + i} \frac{\operatorname{tg} \theta - i}{\operatorname{tg} \theta - i} \\ &= \frac{i \operatorname{tg} \theta + 1 - \operatorname{tg} \theta + i}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} \\ &= \frac{(1 - \operatorname{tg} \theta) + i(1 + \operatorname{tg} \theta)}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} \\ &= \frac{(1 - \operatorname{tg} \theta) + i(1 + \operatorname{tg} \theta)}{\sec^2 \theta}\end{aligned}$$

Para que w esteja no primeiro quadrante do plano de Argand-Gauss, é necessário que

$$\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w)$$

e

$$\operatorname{Re}(w) \geq 0$$

Observe que

$$\operatorname{Re}(w) = \frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta}$$

$$\operatorname{Im}(w) = \frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta}$$

Assim,

$$\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Im}(w) \Rightarrow$$

$$\frac{1 - \operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta} = \frac{1 + \operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta} \Rightarrow$$

$$2 \operatorname{tg} \theta = 0 \Rightarrow$$

$$\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Obs.: Houve um erro na digitação desta questão. No denominador, onde está escrito $\operatorname{tg} \theta + 1$ deveria estar $\operatorname{tg} \theta + i$. Por este motivo, **todos** o alunos que participaram desta avaliação, receberam os **2.0 pontos** da questão. ■

Exercício 4 Considere $z = x + iy$ e observe que

$$z^2 + |z| = 0 \Rightarrow$$

$$(x + iy)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xyi - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}) + 2xyi = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

Da segunda equação deste sistema, segue-se que $x = 0$ ou $y = 0$.

Se $y = 0$, segue-se da primeira equação do sistema, que

$$x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + |x| = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = -|x| \Rightarrow$$

$$x = \nexists$$

Se $x = 0$, segue-se da primeira equação do sistema, que

$$-y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\sqrt{y^2} = y^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = y^4 \Rightarrow$$

$$y^4 - y^2 = 0 \Rightarrow$$

$$y^2 (y^2 - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$y = 0, 1, -1$$

Ou seja, $z = 0, z = i$ ou $z = -i$. ■

Exercício 5 Observe que

$$iz^3 + 1 = (z + i)(iz^2 - z + i)$$

$$z^2 + 1 = (z + i)(z - i)$$

Logo,

$$\lim_{z \rightarrow -i} \frac{iz^3 + 1}{z^2 + 1} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{(z + i)(iz^2 - z + i)}{(z + i)(z - i)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{iz^2 - z + i}{z - i}$$

$$= \frac{3}{2}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

2^a Prova

2^o Semestre

2020

Data: 14 de Outubro de 2021

Duração: 16:00 - 18:15

Problema 1 Considere a função

$$f(z) = xy^2 + \mathbf{i}x^2y$$

- a). Verifique para quais valores de $z = x + \mathbf{i}y$, valem as equações de **Cauchy-Riemann**
- b). Onde f é diferenciável?
- c). Onde f é analítica?

Problema 2 Encontre uma função analítica $f(z)$ tal que sua parte real seja a função

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y$$

e $f(\mathbf{i}) = 1 + \mathbf{i}$.

Problema 3 Resolva a equação

$$\operatorname{Ln}(z^2 - 1) = \frac{\mathbf{i}\pi}{2}$$

Problema 4 Encontre **todas** as soluções da equação

$$\cos z = \cosh z$$

Problema 5 Onde a função

$$f(z) = -5\mathbf{i}z^2 + \frac{2 + \mathbf{i}}{z^2}$$

é analítica?

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 2ª Prova

Data: Quarta-feira, 27 de Outubro de 2021

2020

Turma E5

Exercício 1

a). Observe que as funções parte real e parte imaginária de f são, respectivamente

$$u(x, y) = x y^2$$

$$v(x, y) = x^2 y$$

Donde segue-se que

$$u_x = y^2$$

$$u_y = 2xy$$

$$v_x = 2xy$$

$$v_y = x^2$$

Para que, as **equações de Cauchy-Riemann** sejam válidas é necessário que

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y^2 = x^2 \\ 2xy = -2xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$z = 0$$

□

b). Como as funções u, v, u_x, u_y, v_x e v_y são **contínuas** para quaisquer $z \in \mathbb{C}$ mas, as **equações de Cauchy-Riemann** se verificam apenas em $z = 0$, segue-se que f é **diferenciável** apenas em $z = 0$. □

c). Para que f seja **analítica** num dado $z \in \mathbb{C}$ é necessário que seja diferenciável neste z e também numa vizinhança qualquer de z . Como só há um ponto diferenciável para a função f , segue-se que f é **não analítica** em todo $\mathbb{C}$. ■

Exercício 2 Suponha que

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

com,

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2 y$$

Para que f seja **analítica** em $\mathbb{C}$, é necessário que as **equação de Cauchy-Riemann** sejam válidas em $\mathbb{C}$, ou seja

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} v_x = -3y^2 + 3x^2 \\ v_y = -6xy \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + k, k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

Como, deseja-se que

$$f(i) = 1 + i,$$

ou seja

$$u(0, 1) + i v(0, 1) = 1 + i \Rightarrow$$

$$v(0, 1) = 1 \Rightarrow$$

$$k = 1$$

Portanto,

$$v(x, y) = -3xy^2 + x^3 + 1$$

e

$$f(z) = y^3 - 3x^2 y + i (-3xy^2 + x^3 + 1)$$

■

Exercício 3 Observe que

$$\operatorname{Ln}(z^2 - 1) = \frac{i\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z^2 - 1 = e^{\frac{i\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$z^2 - 1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z^2 - 1 = i \Rightarrow$$

$$z^2 = 1 + i \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{1 + i} \Rightarrow$$

$$z = \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ou seja

$$z_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{9\pi}{8} + i \sin \frac{9\pi}{8} \right)$$

■

Exercício 4 Para a resolução deste problema é necessário lembrar que

$$\cosh z = \cos iz$$

$$\cos(z + 2k\pi) = \cos z$$

Observe que

$$\cos z = \cosh z \Rightarrow$$

$$\cos z = \cos iz \Rightarrow$$

$$z = iz + 2k\pi \Rightarrow$$

$$z - iz = 2k\pi \Rightarrow$$

$$z(1 - i) = 2k\pi \Rightarrow$$

$$z = \frac{2k\pi}{1 - i} \Rightarrow$$

$$z = \frac{2k\pi}{1 - i} \frac{1 + i}{1 + i} \Rightarrow$$

$$z = \frac{2k\pi(1 + i)}{2} \Rightarrow$$

$$z = k\pi(1 + i)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 5 Pode-se expressar

$$f(z) = p(z) + q(z),$$

sendo

$$p(z) = -5iz^2$$

$$q(z) = \frac{2 + i}{z^2}$$

Observe que p é uma função **polinomial** e portanto **analítica** em todo o $\mathbb{C}$. A função q , por sua vez é **racional** e **analítica** em todo $\mathbb{C}$ exceto em $z = 0$. Segue-se disto, que a função f será analítica no conjunto que corresponde à **interseção entre os domínios de analiticidade** de p e q , ou seja, $\mathbb{C} - \{0\}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2020

Data: 26 de Outubro de 2021

Duração: 16:00 - 18:15

Problema 1 *Determine o disco de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

Problema 2 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz$$

onde γ é círculo unitário percorrido no sentido antihorário.

Problema 3 *Resolva a integral*

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

onde γ é a curva $|z| = 2$.

Problema 4 *Calcule os resíduos da função*

$$f(z) = \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z}$$

em todas as singularidades isoladas. Considere o ramo principal de $z^{\frac{1}{2}}$.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Sexta-feira, 29 de Outubro de 2021

2020
Turma E5

Exercício 1 De acordo com a série dada tem-se que

$$a_n = \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

e

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(-1)^{n+1} z^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \frac{(2n)!}{(-1)^n z^{2n}} \right| \\ &= \left| \frac{(-1) z^2}{(2n+2)(2n+1)} \right| \\ &= \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} \end{aligned}$$

Para que a série seja convergente em z , é necessário que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &< 1 \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^2}{(2n+2)(2n+1)} &< 1 \Rightarrow \\ 0 &< 1 \end{aligned}$$

Ou seja, a série converge para quaisquer valores de z . Em outras palavras, o disco de convergência é

$$|z| < \infty$$

Outro Modo:.

Observe que

$$\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

Ou seja, a série dada é, na verdade a expansão da função $\cos z$ como série de Taylor em torno de $z = 0$ e como a função $\cos z$ é analítica para todo $z \in \mathbb{C}$, segue-se que a série dada é convergente para todo $z \in \mathbb{C}$. ■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= \int_{\gamma} \left(z + \frac{1}{z} \right) dz \\ &= \int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z} dz \end{aligned}$$

e que a função

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z}$$

não é analítica apenas em $z = 0$. Como este ponto está dentro do círculo unitário descrito por γ , segue-se da primeira fórmula integral de Cauchy que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= 2\pi i (z^2 + 1) \Big|_{z=0} \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

Outro Modo:

Uma parametrização possível para o círculo unitário com centro na origem e percorrido no sentido antihorário é dada por

$$z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

e disto segue-se que

$$dz = ie^{it} dt$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (z + z^{-1}) dz &= \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it}) ie^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} i (e^{2it} + 1) dt \\ &= i \left(\frac{e^{2it}}{2i} + t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= i \left[\left(\frac{e^{4\pi i}}{2i} + 2\pi \right) - \left(\frac{1}{2i} \right) \right] \\ &= i \left[\frac{1}{2i} + 2\pi - \frac{1}{2i} \right] \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Observe que a função

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 1}$$

possui quatro polos simples em

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = -1$$

$$z_2 = i$$

$$z_3 = -i$$

e todos estão dentro da curva γ de equação $|z| = 2$. Pelo **teorema dos Resíduos**, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \\ &\quad + \text{Res}(f, z_2) + \text{Res}(f, z_3) \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) + \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) + \\ &\quad + \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2) f(z) + \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) f(z) \\ &= \frac{z_0}{4z_0^3} + \frac{z_1}{4z_1^3} + \frac{z_2}{4z_2^3} + \frac{z_3}{4z_3^3} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{z_0^2} + \frac{1}{z_1^2} + \frac{1}{z_2^2} + \frac{1}{z_3^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} (1 + 1 - 1 - 1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exercício 4 Perceba que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z^3 - 4z^2 + 4z} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z^2 - 4z + 4)} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z - 2)^2} \end{aligned}$$

Ou seja, a função f possui um polo **não isolado** em $z = 0$, uma vez que a função $z^{\frac{1}{2}}$ não está definida na parte negativa do eixo real (pois considera-se o argumento

principal no intervalo $-\pi < \theta \leq \pi$). Além disso, f possui um **polo isolado de ordem 2** em $z = 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 2) &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} \left((z - 2)^2 f(z) \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} \left((z - 2)^2 \frac{z^{\frac{1}{2}}}{z(z - 2)^2} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{z^3}} \right] \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere o caminho C , dado por

$$z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta < 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} dz &= ie^{i\theta} d\theta \\ &= iz d\theta \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{sen } \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ &= \frac{z^2 - 1}{2iz} \Rightarrow \\ \text{sen}^4 \theta &= \left(\frac{z^2 - 1}{2iz} \right)^4 \\ &= \frac{(z^2 - 1)^4}{16z^4} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \text{sen}^4 \theta d\theta &= \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16z^4} \frac{dz}{iz} \\ &= \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} dz \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5}$$

possui um **polo de ordem 5** em $z = 0$ e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} dz &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, 0) \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{4!} \frac{d^4}{dz^4} z^5 f(z) \right] \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{24} \frac{d^4}{dz^4} z^5 \frac{(z^2 - 1)^4}{16iz^5} \right] \\
 &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{24 \cdot 16i} \frac{d^4}{dz^4} (z^2 - 1)^4 \right] \\
 &= \frac{2\pi i}{24 \cdot 16i} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{d^4}{dz^4} (z^2 - 1)^4 \right] \\
 &= \frac{\pi}{12 \cdot 16} \lim_{z \rightarrow 0} [1680z^4 - 1440z^2 + 144] \\
 &= \frac{\pi}{12 \cdot 16} 144 \\
 &= \frac{3\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \sin^4 \theta \, d\theta = \frac{3\pi}{4}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

Prova Final

2º Semestre

2020

Data: 02 de Novembro de 2021

Duração: 16:00 - 18:15

Problema 1 *Determine o disco de convergência da série*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (z + 5i)^{2n} (n+1)^2$$

Problema 2 *Resolva a equação*

$$e^z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Problema 3 *Verifique onde a função*

$$f(z) = \frac{|z| + z}{2}$$

é analítica.

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} dz$$

onde γ é o círculo $|z| = 3$ percorrido no sentido antihorário.

Problema 5 *Calcule*

$$\int_0^{2\pi} \frac{8 d\theta}{5 + 2\cos \theta}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final

Data: Quarta-feira, 03 de Novembro de 2021

2020

Turma E5

Exercício 1 De acordo com a série dada tem-se que

$$a_n = (z + 5i)^{2n} (n + 1)^2$$

e

$$a_{n+1} = (z + 5i)^{2n+2} (n + 2)^2$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{(z + 5i)^{2n+2} (n + 2)^2}{(z + 5i)^{2n} (n + 1)^2} \right| \\ &= \left| (z + 5i)^2 \left(\frac{n + 2}{n + 1} \right)^2 \right| \\ &= |z + 5i|^2 \left(\frac{n + 2}{n + 1} \right)^2 \end{aligned}$$

De acordo com o **teste da razão**, para que a série seja convergente em z , é necessário que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z + 5i|^2 \left(\frac{n + 2}{n + 1} \right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z + 5i|^2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n + 2}{n + 1} \right)^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z + 5i|^2 < 1 \Rightarrow$$

$$|z + 5i| < 1$$

Ou seja, a série converge para quaisquer valores de z dentro do círculo de raio 1 e centro em $z_0 = -5i$. ■

Exercício 2 Observe que

$$e^z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$z = \ln \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \ln \left| \frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right| + i \arg \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

$$= i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right)$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 3 Considere $z = x + iy$ e observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{|z| + z}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x + iy}{2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2} + i \frac{y}{2} \end{aligned}$$

Ou seja, a função f possui partes reais e imaginária

$$u(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + x}{2}$$

$$v(x, y) = \frac{y}{2}$$

Donde segue-se que

$$u_x(x, y) = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{2}$$

$$u_y(x, y) = \frac{y}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$v_x(x, y) = 0$$

$$v_y(x, y) = \frac{1}{2}$$

As equações de **Cauchy-Riemann** serão satisfeitas se

$$u_x(x, y) = v_y(x, y)$$

$$u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

Ou seja, quando

$$x = 0$$

$$y = 0$$

Segue-se, dos **critérios de diferenciabilidade**, que f é diferenciável apenas em $z = 0$ e é **não analítica** em todo o $\mathbb{C}$. ■

Exercício 4 Observe que a função

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$$

possui dois polos de ordem 2 em $z = i$ e $z = -i$. Considere portanto as curvas

$$\gamma_1 : z(t) = i + \frac{1}{2}e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\gamma_2 : z(t) = -i + \frac{1}{2}e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

Usando a 2ª **Fórmula Integral de Cauchy**, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)^2} &= \int_{\gamma_1} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{e^{iz} dz}{(z^2 + 1)^2} \\ &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} dz}{(z-i)^2} + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} dz}{(z+i)^2} \\ &= 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{(z+i)^2} \right]'_{z=i} + 2\pi i \left[\frac{e^{iz}}{(z-i)^2} \right]'_{z=-i} \\ &= \frac{\pi}{e} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere a curva γ , dada por

$$z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Assim, tem-se que

$$dz = ie^{i\theta} d\theta$$

$$= iz d\theta$$

e

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{z + z^{-1}}{2}$$

$$= \frac{z^2 + 1}{2z}$$

Portanto,

$$\int_0^{2\pi} \frac{8d\theta}{5 + 2\cos \theta} = \int_{\gamma} \frac{-8idz}{z^2 + 5z + 1}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{-8i}{z^2 + 5z + 1}$$

possui um **polo de ordem simples** em

$$z_0 = \frac{-5 + \sqrt{21}}{2}$$

$$z_1 = \frac{-5 - \sqrt{21}}{2}$$

$$z_0 - z_1 = \sqrt{21}$$

e do **Teorema de Resíduos**, segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{-8idz}{z^2 + 5z + 1} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \\ &= 2\pi i \lim_{z \rightarrow z_0} \left[z - z_0 \frac{-8i}{(z - z_0)(z - z_1)} \right] \\ &= 2\pi i \frac{-8i}{z_0 - z_1} \\ &= \frac{16\pi}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{2\pi} \frac{8d\theta}{5 + 2\cos \theta} = \frac{16\pi}{\sqrt{21}}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma XE e EX

Profº. Edson

1ª Prova

Semestre Especial

2020

Data: 27 de Outubro de 2020

Duração: 16:00 - 19:00

Problema 1 *Expresse o número complexo*

$$\left[\left(-8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i} \right) (-1 - \mathbf{i}) \right]^2$$

na forma polar.

Problema 2 *Calcule*

$$(-1)^{\frac{1}{3}}$$

(Todas as possíveis respostas!)

Problema 3 *Sabendo que $z = 1$ é uma raiz do polinômio*

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 17z - 13,$$

calcule as outras raízes de p .

Problema 4 *Verifique se a função*

$$f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 - |z|}$$

é contínua em $z = 0$. Justifique sua resposta.

Problema 5 *Calcule o limite*

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^{\frac{1}{4}} - 1}{z}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof. Edson

Semestre Suplementar

Gabarito 1ª Prova
Data: Domingo, 29 de Novembro

2020
Turma EX

Exercício 1 *Considere*

$$z = \left[(-8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i}) (-1 - \mathbf{i}) \right]^2$$

Observe que

$$\begin{aligned} z &= (-8 + 8\sqrt{3}\mathbf{i})^2 (-1 - \mathbf{i})^2 \\ &= (64 - 128\sqrt{3}\mathbf{i} - 192) (1 + 2\mathbf{i} - 1) \\ &= 2\mathbf{i} (-128 - 128\sqrt{3}\mathbf{i}) \\ &= 256\sqrt{3} - 256\mathbf{i} \end{aligned}$$

donde segue-se que

$$\begin{aligned} |z| &= \left| 256 (\sqrt{3} - \mathbf{i}) \right| \\ &= 256 \left| \sqrt{3} - \mathbf{i} \right| \\ &= 256\sqrt{4} \\ &= 512 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \arg z &= \operatorname{arctg} \left(\frac{-256}{256\sqrt{3}} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} z &= 512 \left[\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + \mathbf{i} \operatorname{sen} \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 512 \left(\cos \frac{\pi}{6} - \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right) \end{aligned}$$

Exercício 2 *Inicialmente, perceba que*

$$-1 = \cos \pi + \mathbf{i} \operatorname{sen} \pi$$

Assim,

$$\begin{aligned} (-1)^{\frac{1}{3}} &= (\cos \pi + \mathbf{i} \operatorname{sen} \pi)^{\frac{1}{3}} \\ &= \cos \frac{\pi + 2k\pi}{3} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{\pi + 2k\pi}{3} \\ &= w_k \end{aligned}$$

onde $k = 0, 1, 2$. Ou seja

$$\begin{aligned} w_0 &= \cos \frac{\pi}{3} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} + \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ w_1 &= \cos \frac{\pi + 2\pi}{3} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{\pi + 2\pi}{3} \\ &= \cos \pi + \mathbf{i} \operatorname{sen} \pi \\ &= -1 \\ w_2 &= \cos \frac{\pi + 4\pi}{3} + \mathbf{i} \operatorname{sen} \frac{\pi + 4\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} - \mathbf{i} \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 3 *Sabendo que $z = 1$ é raiz do polinômio*

$$p(z) = z^3 - 5z^2 + 17z - 13$$

segue-se que p é divisível por $z - 1$. Realizando esta divisão tem-se

$$p(z) = (z - 1) (z^2 - 4z + 13)$$

Ou seja, as outras raízes de p são também raízes de

$$q(z) = z^2 - 4z + 13$$

Para encontrá-las, observe que

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 - 52 \\ &= -36 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} \\
 &= \frac{4 \pm 6i}{2} \\
 &= 2 \pm 3i
 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *Sabe-se que*

$$f(z) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{1 - |z|}$$

Observe então, que

i) $f(0) = \frac{\operatorname{Im}(0)}{1 - |0|} = \frac{0}{1} = 0$. Ou seja, $f(0)$ existe.

ii) Considerando $z = x + iy$ é possível reescrever f da seguinte maneira

$$f(z) = \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

ou seja

$$u(x, y) = \frac{y}{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$v(x, y) = 0$$

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} f(z) &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) + i \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} v(x, y) \\
 &= 0 + i0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

iii) Por fim, segue-se dos itens anteriores que

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0)$$

Portanto, a função dada é contínua em $z = 0$.

■

Exercício 5 *Considere*

$$w = (1 + z)^{\frac{1}{4}}$$

Observe que

$$w^4 = 1 + z \Rightarrow$$

$$z = w^4 - 1$$

e,

$$z \rightarrow 0 \Rightarrow w \rightarrow 1^{\frac{1}{4}} = 1$$

Estamos admitindo aqui o **valor principal** da raiz quarta. Segue-se, portanto, que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^{\frac{1}{4}} - 1}{z} = \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w - 1}{w^4 - 1}$$

Observe que

$$w^4 - 1 = (w - 1)(w^3 + w^2 + w + 1)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 + z)^{\frac{1}{4}} - 1}{z} &= \lim_{w \rightarrow 1} \frac{w - 1}{(w - 1)(w^3 + w^2 + w + 1)} \\
 &= \lim_{w \rightarrow 1} \frac{1}{w^3 + w^2 + w + 1} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

1ª Prova

2º Semestre

2022

Data: 18 de Maio de 2022

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Expresse o número complexo*

$$\frac{1}{\sqrt{7+24i}}$$

na forma retangular (Todas as possíveis respostas!)

Problema 2 *Para quais valores de $n \in \mathbb{N}$ o número*

$$z = i \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^n$$

terá $\text{Im}(z) = 0$.

Problema 3 *Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$ e*

$$z = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha} i, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Determine o valor de α .

Problema 4 *Verifique a continuidade da função*

$$f(z) = \frac{\text{Re}(z)}{z + iz} - 2z^2$$

em $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Justifique sua resposta.

Problema 5 *Calcule o limite*

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i}$$

Problema 6 (Desafio - 3 Pontos) *Determine o valor da soma, para $n \in \mathbb{N}$, com $n > 1$,*

$$S = \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \sin \frac{6\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 19 de Maio

2022
Turma E5

Exercício 1 Considere

$$z = \frac{1}{\sqrt{7+24i}}$$

e observe inicialmente, que

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{\frac{1}{7+24i}} \\ &= \left(\frac{1}{7+24i} \frac{7-24i}{7-24i} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{7-24i}{625} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(7-24i)^{\frac{1}{2}}}{25} \end{aligned}$$

Além disso, perceba que sendo

$$\begin{aligned} r &= |7-24i| \\ &= \sqrt{625} \\ &= 25 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \theta &= \text{Arg}(7-24i) \\ &= \text{arctg}\left(\frac{-24}{7}\right) \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} 7-24i &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= 25(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} z &= \frac{(7-24i)^{\frac{1}{2}}}{25} \\ &= \frac{[25(\cos \theta + i \sin \theta)]^{\frac{1}{2}}}{25} \\ &= \frac{5(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{2}}}{25} \\ &= \frac{(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{2}}}{5} \\ &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + k\pi\right)}{5}, \end{aligned}$$

com $k = 0, 1$. Portanto, tem-se duas possibilidades:

$$z_0 = \frac{1}{5} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

e

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}{5} \\ &= -\frac{1}{5} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Por fim, sabe-se que

$$\theta = \text{arctg}\left(\frac{-24}{7}\right) \Leftrightarrow \text{tg } \theta = -\frac{24}{7}$$

Segue-se disto, que

$$\begin{aligned} \sin \theta &= -\frac{24}{25} \\ \cos \theta &= \frac{7}{25} \end{aligned}$$

e, além disto,

$$\begin{aligned}\sin \frac{\theta}{2} &= -\sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{1 - \frac{7}{25}}{2}} \\ &= -\sqrt{\frac{18}{25} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\theta}{2} &= \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 + \frac{7}{25}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{32}{25} \cdot \frac{1}{2}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}z_0 &= \frac{1}{5} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5} i \right) \\ &= \frac{4}{25} - \frac{3}{25} i\end{aligned}$$

e

$$z_1 = -\frac{4}{25} + \frac{3}{25} i$$

Outro modo: Observe que

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{\frac{1}{7 + 24i}} \\ &= \left(\frac{1}{7 + 24i} \cdot \frac{7 - 24i}{7 - 24i} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{7 - 24i}{625} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(7 - 24i)^{\frac{1}{2}}}{25}\end{aligned}$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(7 - 24i)^{\frac{1}{2}} = a + bi,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}7 - 24i &= (a + bi)^2 \\ &= (a^2 - b^2) + 2abi\end{aligned}$$

Disto, segue-se que

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ 2ab = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ ab = -12 \end{cases}$$

Da segunda linha deste sistema, tem-se

$$b = -\frac{12}{a}$$

e substituindo-se este resultado na primeira equação, chega-se a

$$a^4 - 7a^2 - 144 = 0$$

Considerando

$$w = a^2,$$

a equação anterior, torna-se

$$w^2 - 7w - 144 = 0,$$

donde segue-se que $w = 16$. Ou seja

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$$

Além disso, para $a = 4$, tem-se $b = -3$ e para $a = -4$, tem-se $b = 3$. Conclui-se, portanto, que

$$(7 - 24i)^{\frac{1}{2}} = \pm (4 - 3i)$$

e

$$\begin{aligned}z &= \sqrt{\frac{1}{7 + 24i}} \\ &= \frac{(7 - 24i)^{\frac{1}{2}}}{25} \\ &= \pm \left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25} i \right)\end{aligned}$$

□

■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned}z &= i \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^n \\ &= i \left(\frac{1 + i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} \right)^n \\ &= i (i)^n \\ &= i^{n+1}\end{aligned}$$

Perceba ainda que

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$\dots$$

Ou seja,

$$\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(i^{n+1}) = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$n + 1 = 2k, k \in \mathbb{N}_*$$

Em outras palavras, $\operatorname{Im}(z) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$n = 2k - 1, k \in \mathbb{N}_*$$

■

Exercício 3 Sabe-se que

$$z = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} + \frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha} i, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

e $\operatorname{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$. Ou seja

$$\operatorname{arctg} \left(\frac{\frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha}}{\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} \right) = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{2\sin \alpha \cos \alpha} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha}{2(1 - \cos \alpha)} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$1 - 2\cos \alpha + 2\sin \alpha = 2 - 2\cos \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6}$$

■

Exercício 4 Deseja-se verificar a continuidade da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{z + iz} - 2z^2$$

em $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$. Inicialmente observe que

$$\begin{aligned} z &= e^{\frac{i\pi}{4}} \\ &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Perceba então, que

i) Sendo $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f\left(e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \\ &= \frac{\operatorname{Re}(z)}{z + iz} - 2z^2 \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} - 2i \\ &= -\frac{5}{2}i \end{aligned}$$

Ou seja, $f(e^{\frac{i\pi}{4}})$ existe.

ii) Considerando $z = x + iy$ é possível reescrever f da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x + iy + i(x + iy)} - 2(x + iy)^2 \\ &= \frac{x}{(x - y) + (x + y)i} - 2(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{x[(x - y) - (x + y)i]}{(x - y)^2 + (x + y)^2} - 2(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{(x^2 - xy) - (x^2 + y^2)i}{2(x^2 + y^2)} - 2(x^2 - y^2 + 2xyi) \\ &= \frac{(x^2 - xy) - 4(x^2 - y^4)}{2(x^2 + y^2)} - \left(\frac{1}{2} + 4xy\right)i \end{aligned}$$

ou seja

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{(x^2 - xy) - 4(x^2 - y^4)}{2(x^2 + y^2)} \\ v(x, y) &= -\left(\frac{1}{2} + 4xy\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) &= \lim_{(x,y) \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} u(x,y) + i \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} v(x,y) \\
 &= 0 - i \frac{5}{2} \\
 &= -\frac{5}{2}i
 \end{aligned}$$

iii) Por fim, segue-se dos itens anteriores que

$$\lim_{z \rightarrow e^{\frac{i\pi}{4}}} f(z) = f(e^{\frac{i\pi}{4}})$$

Portanto, a função dada é contínua em $z = e^{\frac{i\pi}{4}}$. ■

Exercício 5 Deseja-se calcular o limite

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i}$$

Para isto, perceba antes que

$$iz^3 - 1 = (z - i)(iz^2 - z - i)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \lim_{z \rightarrow i} \frac{iz^3 - 1}{z - i} &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i)(iz^2 - z - i)}{z - i} \\
 &= \lim_{z \rightarrow i} (iz^2 - z - i) \\
 &= -3i
 \end{aligned}$$

■

Exercício 6 (Desafio) Sabe-se que

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$$

para qualquer $z \in \mathbb{C}$. Escolhendo

$$\begin{aligned}
 z &= \cos \frac{\pi}{n} + i \sin \frac{\pi}{n} \\
 &= e^{\frac{i2\pi}{n}}
 \end{aligned}$$

e substituindo na equação anterior, tem-se

$$1 + e^{\frac{i2\pi}{n}} + e^{\frac{4i\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} = \frac{e^{i2\pi} - 1}{e^{\frac{i2\pi}{n}} - 1} \Rightarrow$$

$$1 + e^{\frac{i2\pi}{n}} + e^{\frac{4i\pi}{n}} + \dots + e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}} = 0$$

Escrevendo na forma polar,

$$\begin{aligned}
 &\left[1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right] + \\
 &+ i \left[\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \sin \frac{6\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} \right] = 0
 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} &= 0 \\
 \sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \sin \frac{6\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} &= 0
 \end{aligned}$$

e, por fim

$$S = 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

2ª Prova

2º Semestre

2022

Data: 13 de Julho de 2023

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 Calcule a *derivada* da função

$$f(z) = z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z}$$

e determine o conjunto onde essa derivada existe.

Problema 2 Considere a função

$$f(z) = z^2 + (x - 1)^2 + \mathbf{i}(y - 1)^2$$

a). Determine onde f possui *derivada*.

b). Determine onde f é *analítica*.

c). Calcule $f'(1 + i)$.

Problema 3 Calcule o *limite*

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + e^{\mathbf{i}\theta}}{1 - e^{2\mathbf{i}\theta}}$$

onde $\theta \in \mathbb{R}$.

Problema 4 Encontre *todas* as soluções possíveis para a equação

$$(\operatorname{Ln} z)^2 + \operatorname{Ln} z = -1$$

Problema 5 Calcule todos os valores de

$$\mathbf{i}^{\mathbf{i}}$$

Problema 6 (Desafio - 2 Pontos) Encontre uma *função analítica* $f(z)$ cuja parte real seja

$$u(x, y) = (x - y) (x^2 + 4xy + y^2)$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Sexta-feira, 14 de Julho de 2023

2022
Turma E5

Exercício 1 Considere

$$p(z) = z^2$$

$$q(z) = \bar{z}^2 + 2\bar{z}$$

e observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + \bar{z}^2 + 2\bar{z} \\ &= p(z) + q(z) \end{aligned}$$

Como p é polinomial e portanto, derivável em todo $\mathbb{C}$, segue-se que f é derivável onde q também é. Supondo

$$z = x + iy,$$

tem-se

$$\begin{aligned} q(z) &= (x - iy)^2 + 2(x - iy) \\ &= x^2 + 2x - y^2 - 2(xy + y)i \\ &= u(x, y) + v(x, y)i \end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= x^2 + 2x - y^2 \\ v(x, y) &= -2(xy + y) \end{aligned}$$

Perceba que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -2y$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -2x - 2$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

Ou seja, as **Equações de Cauchy-Rieman** são válidas apenas em $z = -1$, único valor de z onde f é derivável. Além disso, segue-se que

$$\begin{aligned} f'(z) &= 2z + q'(z) \\ &= 2z + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i \\ &= 2z + (2x + 2) - 2yi \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Considere

$$p(z) = z^2$$

$$q(z) = (x - 1)^2 + i(y - 1)^2$$

e observe que

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + (x - 1)^2 + i(y - 1)^2 \\ &= p(z) + q(z) \end{aligned}$$

Como p é polinomial e portanto, derivável em todo $\mathbb{C}$, segue-se que f é derivável onde q também é. Supondo

$$q(z) = u(x, y) + v(x, y)i$$

em que

$$u(x, y) = (x - 1)^2$$

$$v(x, y) = (y - 1)^2$$

a). Segue-se que,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2(y - 1)$$

e, usando as **Equações de Cauchy-Rieman**, tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ou seja, f é derivável para todo $z = x + xi$, com $x \in \mathbb{R}$. Além disso, segue-se que

$$f'(z) = p'(z) + q'(z)$$

$$= 2z + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} i$$

$$= 2z + 2(x - 1)$$

□

b). Como f é derivável apenas sobre a reta $y = x$ e para ser analítica em um ponto $z \in \mathbb{C}$ é necessário a analiticidade numa vizinhança deste ponto, segue-se f é **não analítica** em todo $\mathbb{C}$. □

c). De acordo, o que foi mostrado no item (a), segue-se que

$$f'(1 + i) = 2(1 + i)$$

■

Exercício 3 Inicialmente observe que

$$(1 + e^{\theta i})(1 - e^{\theta i}) = 1 - e^{2\theta i}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + e^{i\theta}}{(1 + e^{\theta i})(1 - e^{\theta i})} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{1 - e^{\theta i}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

(Outro Modo): Observe que

$$1 + e^{i\pi} = 0$$

$$1 - e^{2i\pi} = 0$$

e, usando a **Regra de L'Hôpital**, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{2i\theta}} &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{ie^{i\theta}}{-2ie^{2i\theta}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{1}{-2e^{i\theta}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Considerando

$$w = \text{Ln } z$$

a equação em questão torná-se

$$w^2 + w + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Para $w = w_1$, tem-se

$$\text{Ln } z = w_1 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} + i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

e para $w = w_2$,

$$\text{Ln } z = w_2 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} - i \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

■

Exercício 5 Pela definição, tem-se que

$$i^i = e^{i \ln i}$$

$$= e^{i(\ln|i| + i \arg i)}$$

$$= e^{i[\frac{\pi}{2} + 2k\pi]}$$

$$= e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$$

com $k \in \mathbb{Z}$.

■

Exercício 6 (Desafio) Considere

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

sendo

$$u(x, y) = (x - y) (x^2 + 4xy + y^2)$$

Supondo que $f(z)$ é *analítica* para $z \in \Omega$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Segue-se das **Equações de Cauchy-Euler**, que

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 + 6xy + 3y^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + 6xy - 3y^2 \end{cases}$$

Integrando a primeira equação deste sistema em relação a x , obtém-se

$$v(x, y) = -x^3 + 3x^2y + 3y^2x + k(y) \quad (1)$$

Derivando função em (1) em relação a y , tem-se

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + 6xy + k'(y) \quad (2)$$

Comparando (2) com a segunda equação do sistema, conclui-se que

$$k'(y) = -3y^2$$

e disto, segue-se

$$k(y) = -y^3 + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Voltando à eq. (1), tem-se por fim,

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -x^3 + 3x^2y + 3y^2x - y^3 + c \\ &= (x + y) (-x^2 + 4xy - y^2) + c \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2022

Data: 08 de Agosto de 2023

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 Calcule a integral

$$\int_0^{4+2i} e^z \sinh z \, dz$$

Problema 2

a). Encontre uma parametrização para a curva que representa o **arco mais curto** sobre a circunferência

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

que liga os pontos $z = 1$ e $z = i$.

b). Calcule

$$\int_1^i \bar{z} \, dz$$

ao longo da curva descrita no item (a).

Problema 3 Calcule

$$\oint \frac{dz}{e^z(z^2-1)}$$

ao longo da curva fechada que corresponde ao quadrado de vértices $z = \pm 2$ e $z = \pm 2i$.

Problema 4 Considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| < 1$. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta.$$

Problema 5 Calcule

$$\oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz$$

em torno da curva $|z| = 2$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 3^a Prova
Data: Terça-feira, 08 de Agosto de 2023

2022
Turma E5

Exercício 1 Observe inicialmente que a função

$$f(z) = e^z \sinh z$$

é analítica em todo o plano complexo, tendo em vista ser o produto de duas funções analíticas em todo o $\mathbb{C}$. Segue-se disto que a integral em questão não depende do caminho escolhido. Além disto, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^{4+2i} e^z \sinh z \, dz &= \int_0^{4+2i} e^z \frac{e^z - e^{-z}}{2} \, dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{4+2i} (e^{2z} - 1) \, dz \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2z}}{2} - z \right) \Big|_0^{4+2i} \\ &= \frac{1}{4} (e^{8+4i} - 4i - 9) \end{aligned}$$

■

Exercício 2

a). Uma parametrização possível para o arco em questão é dada por

$$\gamma : z = 1 + i + e^{it}, -\pi \leq t \leq -\frac{\pi}{2}$$

□

b). Segue-se que

$$\begin{aligned} \int_1^i \bar{z} \, dz &= - \int_{\gamma} \bar{z} \, dz \\ &= - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (1 - i + e^{-it}) i e^{it} \, dt \\ &= - \int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} [(i+1)e^{it} + i] \, dt \\ &= (i-1)e^{it} - it \Big|_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{4-\pi}{2} i \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Observe que a função

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{e^z(z^2-1)} \\ &= \frac{1}{e^z(z+1)(z-1)}, \end{aligned}$$

possui singularidades em $z_0 = -1$ e $z_1 = 1$, ambas no interior do quadrado dado em questão. Considerando $\gamma_0 : |z+1| = 1$ e $\gamma_1 : |z-1| = 1$, ambas orientadas no sentido horário, e usando o princípio da deformação dos contornos, segue-se que

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz}{e^z(z^2-1)} &= \oint_{\gamma_0} \frac{dz}{e^z(z^2-1)} + \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{e^z(z^2-1)} \\ &= \oint_{\gamma_0} \frac{1}{e^z(z+1)} \, dz + \oint_{\gamma_1} \frac{1}{e^z(z-1)} \, dz \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{e^z(z-1)} \Big|_{z=-1} + \frac{1}{e^z(z+1)} \Big|_{z=1} \right] \\ &= -2\pi i \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \right) \\ &= -2\pi i \sinh 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Considere a curva $\gamma : |z| = 1$, cuja parametrização pode ser dada por

$$z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} i d\theta \Leftrightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

e

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \\ &= \frac{z^2 + 1}{2z} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \\
 &= -i \oint_{\gamma} \frac{1 - a \frac{z^2+1}{2z}}{1 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + a^2} \frac{dz}{z} \\
 &= \frac{-i}{2} \oint_{\gamma} \frac{-az^2 + 2z - a}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} \frac{dz}{z} \\
 &= -\frac{i}{2} \oint_{\gamma} \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)} dz
 \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)}$$

possui **três polos simples** em $z_0 = 0$, $z_1 = a$ e $z_2 = \frac{1}{a}$. Uma vez que $|a| < 1$, segue que apenas z_0 e z_1 encontram-se no interior da curva γ . Usando o **Teorema dos Resíduos**, tem-se

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{i}{2} 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\
 &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) + \lim_{z \rightarrow a} (z-a) f(z) \right] \\
 &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} \frac{az^2 - 2z + a}{(z-a)(az-1)} + \lim_{z \rightarrow a} \frac{az^2 - 2z + a}{z(az-1)} \right] \\
 &= 2\pi
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5

$$\oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz$$

Perceba que a função

$$f(z) = \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1}$$

possui um **polo simples** em $z_0 = 1$ e um outro polo que não se sabe a classificação em $z_1 = 0$. Pelo **Teorema dos Resíduos**, sabe-se que

$$\oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz = 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)]$$

Como z_0 é **polo simples**, tem-se

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\
 &= \lim_{z \rightarrow 1} \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \\
 &= \sinh 1
 \end{aligned}$$

Para calcular o resíduo em z_1 será necessário encontrar a **série de Laurent** para a função f em torno de z_1 . Para isto, usando o desenvolvimento em **série de Taylor**, sabe-se que

$$\sinh z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \frac{z^9}{9!} + \dots \Rightarrow$$

$$\sinh\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} + \frac{z^{-7}}{7!} + \frac{z^{-9}}{9!} + \dots$$

Além disso

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z-1} &= -\frac{1}{1-z} \\
 &= -\left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots\right) \\
 &= -1 - z - z^2 - z^3 - z^4 - \dots
 \end{aligned}$$

para $|z| < 1$. Por fim, a **série de Laurent** que deseja-se encontrar, é dada por

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sinh\left(\frac{1}{z}\right) \frac{1}{z-1} \\
 &= \left(z^{-1} + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-5}}{5!} + \dots\right) (-1 - z - z^2 - \dots)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \text{Res}(f, z_0) &= \text{coeficiente do termo } z^{-1} \\
 &= -1 - \frac{1}{3!} - \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} - \dots \\
 &= -\sinh 1
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \oint \frac{\sinh\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1)] \\
 &= 2\pi i [\sinh 1 - \sinh 1] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

Prova Final

2^o Semestre

2022

Data: 10 de Agosto de 2023

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Escreva na **forma polar** o seguinte número complexo*

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i}$$

Problema 2 *Encontre a solução geral da equação*

$$\operatorname{sen} z = \cosh 3$$

Problema 3 *Discuta a analiticidade da função*

$$f(z) = z |z|.$$

Caso seja analítica, determine sua derivada.

Problema 4 *Calcule a integral*

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{1 + z^4}$$

sendo γ a curva fechada representada pela equação $x^2 + y^2 = 2x$.

Problema 5 *Considere $a \in \mathbb{R}$ tal que $|a| > 1$. Calcule*

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta.$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sexta-feira, 11 de Agosto de 2023

2022
Turma E5

Exercício 1 Observe inicialmente que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i} &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i} \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{-1 - \sqrt{3}i} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i} \right\| &= \sqrt{2} \\ \arg \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i} \right) &= \arctg(-\sqrt{3}) \\ &= -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}{-1 + \sqrt{3}i} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} z &= \cosh 3 && \Leftrightarrow \\ \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} &= \frac{e^3 + e^{-3}}{2} && \Leftrightarrow \\ e^{2iz} - 1 &= i(e^3 + e^{-3})e^{iz} && \Leftrightarrow \\ e^{2iz} - i(e^3 + e^{-3})e^{iz} - 1 &= 0\end{aligned}$$

Considerando

$$w = e^{iz}$$

a equação anterior torna-se

$$w^2 - i(e^3 + e^{-3})w - 1 = 0$$

cujas soluções são

$$w = \frac{i(e^3 + e^{-3}) \pm i(e^3 - e^{-3})}{2}$$

ou seja

$$\begin{aligned}w_0 &= \frac{i(e^3 + e^{-3}) + i(e^3 - e^{-3})}{2} \\ &= ie^3 \\ w_1 &= \frac{i(e^3 + e^{-3}) - i(e^3 - e^{-3})}{2} \\ &= ie^{-3}\end{aligned}$$

Para $w = w_0$ tem-se

$$\begin{aligned}e^{iz} &= ie^3 && \Leftrightarrow \\ iz &= \ln(ie^3) && \Leftrightarrow \\ iz &= \ln e^3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) && \Leftrightarrow \\ iz &= 3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) && \Leftrightarrow \\ z &= -3i + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

e, para $w = w_1$, tem-se

$$\begin{aligned}e^{iz} &= ie^{-3} && \Leftrightarrow \\ iz &= \ln(ie^{-3}) && \Leftrightarrow \\ iz &= \ln e^{-3} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) && \Leftrightarrow \\ iz &= -3 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) && \Leftrightarrow \\ z &= 3i + \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

■

Exercício 3 Considere $z = x + iy$ e observe que

$$\begin{aligned}f(z) &= z|z| \\ &= (x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} \\ &= x\sqrt{x^2 + y^2} + iy\sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Ou seja, as partes real e imaginária de f são

$$\begin{aligned}u(x, y) &= x\sqrt{x^2 + y^2} \\ v(x, y) &= y\sqrt{x^2 + y^2}\end{aligned}$$

Perceba que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2 + 2y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Segue-se portanto, das equações de Cauchy-Riemann, a função f será diferenciável, para os valores de x e y tais que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = \pm y \\ xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Portanto $z = 0$ é o único ponto onde f pode ser diferenciável, porém as derivadas parciais não estão definidas em $(0, 0)$, ou seja f não é diferenciável em todo $\mathbb{C}$, e o mesmo segue-se para a sua analiticidade. ■

Exercício 4 Observe que

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2x \Leftrightarrow \\ (x-1)^2 + y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Ou seja, a curva dada corresponde ao círculo de raio 1 e centro em $z = 1$. Perceba ainda que os polos da função

$$f(z) = \frac{1}{1+z^4}$$

são os zeros da equação

$$1 + z^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^4 = -1 \Leftrightarrow$$

$$z = \sqrt[4]{-1}$$

$$= (\cos \pi + i \sin \pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \cos \frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{4}$$

com $k = 0, 1, 2, 3$. Ou seja

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como apenas z_0 e z_3 estão no interior da curva γ e são todos **polos simples**, segue-se que

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) \\ &= \frac{1}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)(z_0 - z_3)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(i\sqrt{2})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_3) &= \lim_{z \rightarrow z_3} (z - z_3) f(z) \\ &= \frac{1}{(z_3 - z_0)(z_3 - z_1)(z_3 - z_2)} \\ &= \frac{1}{(-i\sqrt{2})(\sqrt{2} - i\sqrt{2})(\sqrt{2})} \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{2}(i+1)} \end{aligned}$$

Disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{dz}{1+z^4} &= 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_3)] \\ &= 2\pi i \left[\frac{1}{2\sqrt{2}(i-1)} - \frac{1}{2\sqrt{2}(i+1)} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{2}\pi i}{2} \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere a curva $\gamma : |z| = 1$, cuja parametrização pode ser dada por

$$z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} i d\theta \Leftrightarrow d\theta = -i \frac{dz}{z}$$

e

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \\ &= \frac{z^2 + 1}{2z} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta \\ &= -i \oint_{\gamma} \frac{1 - a \frac{z^2+1}{2z}}{1 - 2a \frac{z^2+1}{2z} + a^2} \frac{dz}{z} \\ &= \frac{-i}{-2} \oint_{\gamma} \frac{-az^2 + 2z - a}{az^2 - (a^2 + 1)z + a} \frac{dz}{z} \\ &= -\frac{i}{2} \oint_{\gamma} \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)} dz \end{aligned}$$

Observe que a função

$$f(z) = \frac{az^2 - 2z + a}{z(z-a)(az-1)}$$

possui **três polos simples** em $z_0 = 0$, $z_1 = a$ e $z_2 = \frac{1}{a}$. Uma vez que $|a| > 1$, segue que apenas z_0 e z_2 encontram-se no interior da curva γ . Usando o **Teorema dos Resíduos**, tem-se

$$\begin{aligned} A &= -\frac{i}{2} 2\pi i [\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_2)] \\ &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) + \lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} (z - \frac{1}{a}) f(z) \right] \\ &= \pi \left[\lim_{z \rightarrow 0} \frac{az^2 - 2z + a}{(z-a)(az-1)} + \lim_{z \rightarrow \frac{1}{a}} \frac{az^2 - 2z + a}{az(z-a)} \right] \\ &= \pi [1 - 1] \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Profº. Edson

1ª Prova

2º Semestre

2023

Data: 04 de Abril de 2024

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine os números complexos sobre a reta $y = 2x + 1$ que possuem módulo $\sqrt{3}$.*

Problema 2 *Escreva na forma $a + bi$ o número complexo*

$$\left[(1 - i)^3 + i^{157} \right] (1 + i^5)^{-1}$$

Problema 3 *Encontre todas as soluções da equação complexa*

$$w^6 + w^3 + 1 = 0$$

Problema 4 *Considere a função*

$$f(z) = \frac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - 4iz - 3}$$

definida deste modo para todo $z \in \mathbb{C}$, tal que $z \neq 3i$ e $z \neq i$. Determine quais os valores a função deveria assumir em $z = 3i$ e em $z = i$ para que seja contínua nesses pontos.

Problema 5 *Calcule o limite*

$$\lim_{z \rightarrow -2i} \frac{z^3 - 8i}{z + 2i}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova

Data: Sexta-feira, 05 de Abril de 2024

2023

Turma E5

Exercício 1 Considere $z = x + iy$ um número complexo de módulo $\sqrt{3}$ e que está sobre a reta $y = 2x + 1$, ou seja

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação deste sistema, na primeira tem-se

$$x^2 + (2x + 1)^2 = 3 \Rightarrow$$

$$5x^2 + 4x - 2 = 0$$

Ou seja,

$$x = -\frac{2}{5} \pm \frac{\sqrt{14}}{5}$$

e

$$y = \frac{1}{5} \pm \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

Portanto

$$z = \left(-\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{14}}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{14}}{5}\right)i$$

ou

$$z = \left(-\frac{2}{5} - \frac{\sqrt{14}}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2\sqrt{14}}{5}\right)i$$

■

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned} \left[(1-i)^3 + i^{157}\right] (1+i^5)^{-1} &= \frac{(1-i)^3 + i^{157}}{1+i^5} \\ &= \frac{-2i(1-i) + i^{2 \times 78 + 1}}{1+i} \\ &= \frac{-2 - 2i + (-1)^{78} i}{1+i} \\ &= \frac{-2 - i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} \\ &= \frac{-3+i}{2} \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Deseja-se encontrar todas as raízes da equação

$$w^6 + w^3 + 1 = 0$$

Para isso, considere

$$z = w^3$$

e observe que a equação dada, pode ser reescrita como

$$z^2 + z + 1 = 0$$

Donde segue-se que

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

ou

$$z = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Na variável w ,

$$w^3 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow w = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

ou

$$w^3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow w = \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Na forma polar,

$$\begin{aligned} w &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Logo

$$w_0 = \cos \frac{2\pi}{9} + i \sin \frac{2\pi}{9}$$

$$w_1 = \cos \frac{8\pi}{9} + i \sin \frac{8\pi}{9}$$

$$w_2 = \cos \frac{14\pi}{9} + i \sin \frac{14\pi}{9}$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} w &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\mathbf{i}\sqrt{3}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \left(\cos \frac{4\pi}{3} + \mathbf{i} \sin \frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} w_3 &= \cos \frac{4\pi}{9} + \mathbf{i} \sin \frac{4\pi}{9} \\ w_4 &= \cos \frac{10\pi}{9} + \mathbf{i} \sin \frac{10\pi}{9} \\ w_5 &= \cos \frac{16\pi}{9} + \mathbf{i} \sin \frac{16\pi}{9} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Para que a função dada seja contínua em $z = 3\mathbf{i}$, é necessário que

$$\begin{aligned} f(3\mathbf{i}) &= \lim_{z \rightarrow 3\mathbf{i}} f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 3\mathbf{i}} \frac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - 4\mathbf{i}z - 3} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3\mathbf{i}} \frac{(z^3 + 3\mathbf{i}z^2 + z + 3\mathbf{i})(z - 3\mathbf{i})}{(z - \mathbf{i})(z - 3\mathbf{i})} \\ &= \lim_{z \rightarrow 3\mathbf{i}} \frac{z^3 + 3\mathbf{i}z^2 + z + 3\mathbf{i}}{z - \mathbf{i}} \\ &= \frac{-48\mathbf{i}}{2\mathbf{i}} \\ &= -24 \end{aligned}$$

De modo semelhante, para que f seja contínua em $z = \mathbf{i}$,

é necessário que

$$\begin{aligned} f(\mathbf{i}) &= \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} \frac{z^4 + 10z^2 + 9}{z^2 - 4\mathbf{i}z - 3} \\ &= \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} \frac{(z^3 + \mathbf{i}z^2 + 9z + 9\mathbf{i})(z - \mathbf{i})}{(z - \mathbf{i})(z - 3\mathbf{i})} \\ &= \lim_{z \rightarrow \mathbf{i}} \frac{z^3 + \mathbf{i}z^2 + 9z + 9\mathbf{i}}{z - 3\mathbf{i}} \\ &= \frac{16\mathbf{i}}{-2\mathbf{i}} \\ &= -8 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Deseja-se calcular o limite

$$\lim_{z \rightarrow -2\mathbf{i}} \frac{z^3 - 8\mathbf{i}}{z + 2\mathbf{i}}$$

Para isto, perceba antes que

$$z^3 - 8\mathbf{i} = (z + 2\mathbf{i})(z^2 - 2\mathbf{i}z - 4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -2\mathbf{i}} \frac{z^3 - 8\mathbf{i}}{z + 2\mathbf{i}} &= \lim_{z \rightarrow -2\mathbf{i}} \frac{(z + 2\mathbf{i})(z^2 - 2\mathbf{i}z - 4)}{z + 2\mathbf{i}} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2\mathbf{i}} (z^2 - 2\mathbf{i}z - 4) \\ &= -12 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

2ª Prova

2º Semestre

2023

Data: 16 de Maio de 2024

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Considere a função complexa*

$$f(z) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2} + \left(\frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i}$$

Determine o domínio de analiticidade de f .

Problema 2 *Determine todos os valores complexos z que obedecem a equação*

$$e^{z-1} = -\mathbf{i}e^3$$

Problema 3 *Calcule*

$$\int_C (x^2 + iy^3) dz$$

sendo C o segmento de reta que vai de $z = 1$ para $z = \mathbf{i}$.

Problema 4 *Resolva a integral*

$$\int_0^{\pi \mathbf{i}} z^2 e^z dz$$

Problema 5 *Resolva a integral*

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z-1)}$$

sendo C a curva dada por $|z - 2| = 5$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Segunda-feira, 20 de Maio de 2024

2023
Turma E5

Exercício 1 Considere $z = x + iy$ e observe que, para a função dada, tem-se

$$u(x, y) = \frac{x^3 + xy^2 + x}{x^2 + y^2}$$

$$v(x, y) = \frac{x^2y + y^3 - y}{x^2 + y^2}$$

Segue-se que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Ou seja,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, \forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

Além disso, as funções u , v , $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{C} - \{0\}$, o que garante que f é **analítica** em $\mathbb{C} - \{0\}$. ■

Exercício 2 Deseja-se resolver a equação

$$e^{z-1} = -ie^3$$

Para isto, observe que

$$e^{z-1} = -ie^3 \Rightarrow$$

$$z - 1 = \ln(-ie^3) \Rightarrow$$

$$z = 1 + \ln|-ie^3| + i \arg(-ie^3) \Rightarrow$$

$$z = 1 + \ln e^3 + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \Rightarrow$$

$$z = 4 + i\left(\frac{4k-1}{2}\right)\pi$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 3 Uma parametrização possível para o segmento C é dado por

$$z(t) = (1-t) + i(t); 0 \leq t \leq 1$$

Logo

$$z'(t) = -1 + i$$

e

$$\begin{aligned} \int_C (x^2 + iy^3) dz &= \int_0^1 [(1-t)^2 + it^3] (-1 + i) dt \\ &= \int_0^1 (1 - 2t + t^2 + it^3) (-1 + i) dt \\ &= \int_0^1 [-1 + i + (2 - 2i)t - \\ &\quad + (i - 1)t^2 - (i + 1)t^3] dt \\ &= (-1 + i)t + (1 - i)t^2 + \\ &\quad + \frac{1}{3}(i - 1)t^3 - \frac{1}{4}(i + 1)t^4 \Big|_0^1 \\ &= \frac{i - 7}{12} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Tendo em vista que a função $f(z) = z^2e^z$ é o produto de duas funções analíticas em todo o conjunto $\mathbb{C}$, segue-se que f é também analítica em $\mathbb{C}$. Desta forma para a resolução da integral em questão é suficiente encontrar uma primitiva de f e usar o **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Contorno**. Para isto, usando **integração por partes**, considere

$$\begin{cases} u = z^2 \\ dv = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2z dz \\ v = e^z \end{cases}$$

Logo,

$$\int z^2 e^z dz = z^2 e^z - 2 \int e^z z dz$$

Repetindo o processo, considere

$$\begin{cases} p = z \\ dq = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dp = dz \\ q = e^z \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned}
 \int e^z z \, dz &= z e^z - \int e^z \, dz \\
 &= z e^z - e^z + k \\
 &= e^z (z - 1) + k, \, k \in \mathbb{C}
 \end{aligned}$$

Retornando a integral original, tem-se

$$\begin{aligned}
 \int z^2 e^z \, dz &= z^2 e^z - 2 \int e^z z \, dz \\
 &= z^2 e^z - 2 [e^z (z - 1) + k] \\
 &= e^z (z^2 - 2z + 2) + 2k
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi i} z^2 e^z \, dz &= e^z (z^2 - 2z + 2) \Big|_0^{\pi i} \\
 &= e^{\pi i} (-\pi^2 - 2\pi i + 2) - 2 \\
 &= \pi^2 + 2\pi i - 4
 \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Observe que a função

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-1)}$$

possui singularidades nos pontos

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 1$$

e ambos estão no interior da curva C , dada por $|z - 2| =$

5. Sejam C_0 e C_1 círculos de raio $\frac{1}{4}$ centrados em z_0 e

z_1 , respectivamente. Pelo **Teorema da Deformação dos Contornos**, segue-se que

$$\oint_C \frac{dz}{z^3(z-1)} = \oint_{C_0} \frac{dz}{z^3(z-1)} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z-1)}$$

e, usando as **Fórmulas Integrais de Cauchy**, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_0} \frac{dz}{z^3(z-1)} &= \oint_{C_0} \frac{\left(\frac{1}{z-1}\right) dz}{z^3} \\
 &= \frac{2\pi i}{2!} \left(\frac{1}{z-1}\right)'' \Big|_{z_0} \\
 &= \pi i \frac{2}{(z-1)^3} \Big|_0 \\
 &= -2\pi i
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \oint_{C_1} \frac{dz}{z^3(z-1)} &= \oint_{C_1} \frac{\left(\frac{1}{z^3}\right) dz}{z-1} \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{z^3}\right) \Big|_{z_1} \\
 &= 2\pi i \left(\frac{1}{z^3}\right) \Big|_1 \\
 &= 2\pi i
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{dz}{z^3(z-1)} &= -2\pi i + 2\pi i \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

3ª Prova

2º Semestre

2023

Data: 13 de Junho de 2024

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Considere*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k$$

e calcule

$$\oint_C \frac{f(z)}{z^4} dz$$

sendo C o círculo unitário centrado na origem.

Problema 2 *Calcule*

$$\oint_C \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{dz}{(z + \mathbf{i})^n (n + 6)!}$$

onde C é a curva de equação $|z - \mathbf{i}| = 3$.

Problema 3 *Calcule o **resíduo** da função*

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z - z}{z \operatorname{senh} z}$$

em todos os seus polos.

Problema 4 *Resolva a integral*

$$\oint \frac{dz}{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) - 1}$$

em torno da curva $|z - 16| = 5$.

Problema 5 *Resolva a integral*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta \, d\theta}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Sexta-feira, 14 de Junho

2023
Turma E5

Exercício 1 Inicialmente observe que a função

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k$$

possui sua expressão na forma de uma **série de Taylor**, em torno de $z_0 = 0$ ou seja f é **analítica** em todo o $\mathbb{C}$ (a rigor isto deveria ser verificado através de algum teste de convergência, como o **Teste da Razão** por exemplo).

Segue-se disto que a função sob a integral,

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z^4} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k}{z^4} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^{k-4} \\ &= \frac{1}{3} z^{-3} + \frac{8}{9} z^{-2} + z^{-1} + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} z^{k-4} \end{aligned}$$

possui sua expressão na forma de uma **série de Laurent** em torno de $z_0 = 0$ que é um polo da função g e tal polo está no interior da curva C .

Sabe-se que

$$2\pi i a_{-1} = \int_C g(z) dz$$

onde a_{-1} é o coeficiente do termo z^{-1} na série de Laurent em torno de z_0 e C uma curva fechada que tenha z_0 em seu interior (o que é o caso). Ou seja

$$\int_C \frac{f(z)}{z^4} dz = 2\pi i$$

□

(Outro Modo:) Uma vez que f possui uma expressão em série de Taylor em torno de $z_0 = 0$ segue-se que f é **analítica** em todoo $\mathbb{C}$ (a rigor isto deveria ser verificado através de algum teste de convergência, como o **Teste da Razão** por exemplo) e a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^4}$$

tem z_0 como um polo de ordem 4 no interior da curva C . Pelo **Teorema dos Resíduos** tem-se que

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z^4} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{f(z)}{z^4}, z_0 \right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{3!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^3}{dz^3} \left(z^4 \frac{f(z)}{z^4} \right) \\ &= \frac{2\pi i}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^3}{dz^3} f(z) \\ &= \frac{2\pi i}{6} \lim_{z \rightarrow 0} f'''(z) \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k z^{k-1} \\ f''(z) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1) z^{k-2} \\ f'''(z) &= \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3} \end{aligned}$$

$$= 3! + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{f(z)}{z^4} dz &= \frac{2\pi i}{6} \lim_{z \rightarrow 0} \left[3! + \sum_{k=4}^{+\infty} \frac{k^3}{3^k} k(k-1)(k-2) z^{k-3} \right] \\ &= \frac{2\pi i}{6} 3! \\ &= 2\pi i \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Observe que a função sob a integral

$$f(z) = \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{1}{(z+i)^n (n+6)!}$$

$$= \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{(z+i)^{-n}}{(n+6)!}$$

possui sua expressão na forma de uma **série de Laurent** em torno do ponto $z_0 = -i$ que é **polo essencial** da função (único polo, inclusive!). Além disto, perceba que o coeficiente do termo $(z+i)^{-1}$ ocorre quando $n = 1$, ou seja

$$a_{-1} = \frac{1}{7!}$$

e o polo z_0 encontra-se no interior da curva $|z-i| = 3$. Assim, pelo **teorema dos resíduos**, segue-se que

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i a_{-1}$$

$$= \frac{2\pi i}{7!}$$

■

Exercício 3 Observe inicialmente que $z = 0$ (um possível candidato a polo da função) é raiz do numerador e do denominador simultaneamente, isto não pode ocorrer (para ser polo é necessário ser zero apenas do denominador). Reescreva a função da seguinte maneira

$$f(z) = \frac{z \left(\frac{\sinh z}{z} - 1 \right)}{z \sinh z}$$

$$= \frac{\frac{\sinh z}{z} - 1}{\sinh z}$$

Assim, os polos de f são as raízes da equação

$$\sinh z = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{e^z - e^{-z}}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$e^z - \frac{1}{e^z} = 0 \Rightarrow$$

$$e^{2z} - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$z_k = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$$

(Perceba que $z = 0$ aparece novamente como polo da função, porém será um polo simples. Não tivesse sido excluído anteriormente, teria ordem 2, o que seria um

erro!). Assim,

$$\text{Res}(f(z), z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z)$$

$$= \frac{\sinh z_k - z_k}{(z \sinh z)' \Big|_{z=z_k}}$$

$$= \frac{\sinh z_k - z_k}{\sinh z_k + z_k \cosh z_k}$$

$$= \frac{\sinh k\pi i - k\pi i}{k\pi i \cosh k\pi i}$$

$$= \frac{-1}{\cosh k\pi i}$$

$$= \frac{1}{(-1)^{k+1}}$$

para $k \neq 0$. Para $k = 0$, tem-se o polo $z = 0$ e

$$\text{Res}(f(z), 0) = \lim_{z \rightarrow 0} z f(z)$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} z \frac{\sinh z - z}{z \sinh z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sinh z - z}{\sinh z}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - 1}{\cosh z}$$

$$= 0$$

Obs.: Quem não soube lidar com o polo $z = 0$ não será penalizado por isso. ■

Exercício 4 Para encontrar os polos da função sob a integração é necessário resolver a seguinte equação

$$\text{Ln}(\text{Ln } z) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Ln}(\text{Ln } z) = 1 \Rightarrow$$

$$\text{Ln } z = e \Rightarrow$$

$$z = e^e$$

Ou seja, a função dada possui único polo simples em $z_0 = e^e$ e este está no interior da curva $|z - 16| = 5$.

Portanto

$$\begin{aligned}\oint \frac{dz}{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) - 1} &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{1}{\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) - 1}, z_0 \right) \\ &= 2\pi i \frac{1}{(\operatorname{Ln}(\operatorname{Ln} z) - 1)' \Big|_{z=z_0}} \\ &= 2\pi i \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{Ln} z} \frac{1}{z} \Big|_{z=e^e}} \\ &= 2\pi i e^{e+1}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere C sendo o círculo unitário centrado na origem cuja parametrização pode ser dada por

$$z = e^{i\theta}, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2i} \\ \operatorname{sen} 2\theta &= \frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \\ &= \frac{(e^{i\theta})^2 - (e^{i\theta})^{-2}}{2i} \\ &= \frac{z^2 - z^{-2}}{2i}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta &= \oint_C \frac{\frac{z^2 - z^{-2}}{2i}}{5 - 4\frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^4 - 1}{z^2(-2z^2 + 5iz + 2)} dz\end{aligned}$$

A função

$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

sob a integral possui polos em

$$z_0 = 0$$

e

$$5iz - 2z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{i}{2} \text{ e } z_2 = 2i$$

sendo z_0 de **ordem 2** e z_1 e z_2 **polos simples**. Apenas os polos z_0 e z_1 encontram-se no interior do círculo C , portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{2i} 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

Onde

$$\operatorname{Res}(f(z), z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 \frac{z^4 - 1}{z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{z^4 - 1}{z^2(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 - 1}{(-2z^2 + 5iz + 2)}$$

$$= \frac{5i}{4}$$

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \frac{z_1^4 - 1}{[z^2(-2z^2 + 5iz + 2)]' \Big|_{z=z_1}}$$

$$= \frac{z_1^4 - 1}{-8z_1^3 + 15iz_1^2 + 4z_1}$$

$$= -\frac{5i}{4}$$

Ou seja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta = 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

Prova Final

2^o Semestre

2023

Data: 18 de Junho de 2024

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Sabendo que z é um número complexo tal que*

$$z^{-1} + z = 2 \cos \theta, \theta \in \mathbb{R}$$

Calcule, em função de θ ,

$$z^{-2024} + z^{2024}$$

Problema 2 *Calcule*

$$\int_C (x^2 + iy^3) dz$$

sendo C o segmento de reta que vai de $z = 1$ para $z = \mathbf{i}$.

Problema 3 *Resolva a integral*

$$\int_0^{\pi \mathbf{i}} z^2 e^z dz$$

Problema 4 *Calcule*

$$\oint_C \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{dz}{(z + \mathbf{i})^n (n + 6)!}$$

onde C é a curva de equação $|z - \mathbf{i}| = 3$.

Problema 5 *Resolva a integral*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin 2\theta d\theta}{5 - 4 \sin \theta}$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quarta-feira, 19 de Junho

2023
Turma E5

Exercício 1 Sabendo que

$$z^{-1} + z = 2 \cos \theta$$

Segue-se que

$$\frac{1}{z} + z = 2 \cos \theta \Rightarrow$$

$$\frac{1 + z^2}{z} = 2 \cos \theta \Rightarrow$$

$$z^2 - 2 \cos \theta z + 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau, tem-se

$$z_1 = \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}$$

ou

$$z_2 = \cos \theta - \operatorname{sen} \theta \mathbf{i}$$

Assim para $z = z_1$, tem-se que

$$z^{-2-24} + z^{2024} = (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})^{-2024} +$$

$$+ (\cos \theta + \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})^{2024}$$

$$= \cos(2024\theta) - \operatorname{sen}(2024\theta) \mathbf{i} +$$

$$+ \cos(2024\theta) + \operatorname{sen}(2024\theta) \mathbf{i}$$

$$= 2 \cos(2024\theta)$$

e para $z = z_2$

$$z^{-2-24} + z^{2024} = (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})^{-2024} +$$

$$+ (\cos \theta - \operatorname{sen} \theta \mathbf{i})^{2024}$$

$$= \cos(2024\theta) + \operatorname{sen}(2024\theta) \mathbf{i} +$$

$$+ \cos(2024\theta) - \operatorname{sen}(2024\theta) \mathbf{i}$$

$$= 2 \cos(2024\theta)$$

Exercício 2 Uma parametrização possível para o segmento C é dado por

$$z(t) = (1-t) + \mathbf{i}(t); 0 \leq t \leq 1$$

Logo

$$z'(t) = -1 + \mathbf{i}$$

e

$$\int_C (x^2 + \mathbf{i}y^3) dz = \int_0^1 [(1-t)^2 + \mathbf{i}t^3] (-1 + \mathbf{i}) dt$$

$$= \int_0^1 (1 - 2t + t^2 + \mathbf{i}t^3) (-1 + \mathbf{i}) dt$$

$$= \int_0^1 [-1 + \mathbf{i} + (2 - 2\mathbf{i})t -$$

$$+ (\mathbf{i} - 1)t^2 - (\mathbf{i} + 1)t^3] dt$$

$$= (-1 + \mathbf{i})t + (1 - \mathbf{i})t^2 +$$

$$+ \frac{1}{3}(\mathbf{i} - 1)t^3 - \frac{1}{4}(\mathbf{i} + 1)t^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{\mathbf{i} - 7}{12}$$

■

Exercício 3 Tendo em vista que a função $f(z) = z^2 e^z$ é o produto de duas funções analíticas em todo o conjunto $\mathbb{C}$, segue-se que f é também analítica em $\mathbb{C}$. Desta forma para a resolução da integral em questão é suficiente encontrar uma primitiva de f e usar o **Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Contorno**. Para isto, usando **integração por partes**, considere

$$\begin{cases} u = z^2 \\ dv = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2z dz \\ v = e^z \end{cases}$$

Logo,

$$\int z^2 e^z dz = z^2 e^z - 2 \int e^z z dz$$

Repetindo o processo, considere

$$\begin{cases} p = z \\ dq = e^z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dp = dz \\ q = e^z \end{cases}$$

e

$$\int e^z z dz = z e^z - \int e^z dz$$

$$= z e^z - e^z + k$$

$$= e^z (z - 1) + k, k \in \mathbb{C}$$

Retornando a integral original, tem-se

$$\begin{aligned}\int z^2 e^z dz &= z^2 e^z - 2 \int e^z z dz \\ &= z^2 e^z - 2 [e^z (z - 1) + k] \\ &= e^z (z^2 - 2z + 2) + 2k\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi i} z^2 e^z dz &= e^z (z^2 - 2z + 2) \Big|_0^{\pi i} \\ &= e^{\pi i} (-\pi^2 - 2\pi i + 2) - 2 \\ &= \pi^2 + 2\pi i - 4\end{aligned}$$

■

Exercício 4 Observe que a função sob a integral

$$\begin{aligned}f(z) &= \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{1}{(z+i)^n (n+6)!} \\ &= \sum_{n=-5}^{+\infty} \frac{(z+i)^{-n}}{(n+6)!}\end{aligned}$$

possui sua expressão na forma de uma **série de Laurent** em torno do ponto $z_0 = -i$ que é **polo essencial** da função (único polo, inclusive!). Além disto, perceba que o coeficiente do termo $(z+i)^{-1}$ ocorre quando $n = 1$, ou seja

$$a_{-1} = \frac{1}{7!}$$

e o polo z_0 encontra-se no interior da curva $|z-i| = 3$. Assim, pelo **teorema dos resíduos**, segue-se que

$$\begin{aligned}\int_C f(z) dz &= 2\pi i a_{-1} \\ &= \frac{2\pi i}{7!}\end{aligned}$$

■

Exercício 5 Considere C sendo o círculo unitário centrado na origem cuja parametrização pode ser dada por

$$z = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta \leq \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

Além disto, tem-se que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2i} \\ \operatorname{sen} 2\theta &= \frac{e^{i2\theta} - e^{-i2\theta}}{2i} \\ &= \frac{(e^{i\theta})^2 - (e^{i\theta})^{-2}}{2i} \\ &= \frac{z^2 - z^{-2}}{2i}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta &= \oint_C \frac{\frac{z^2 - z^{-2}}{2i}}{5 - 4\frac{z - z^{-1}}{2i}} \frac{dz}{iz} \\ &= \frac{1}{2i} \oint_C \frac{z^4 - 1}{z^2 (-2z^2 + 5iz + 2)} dz\end{aligned}$$

A função

$$f(z) = \frac{z^4 - 1}{z^2 (-2z^2 + 5iz + 2)}$$

sob a integral possui polos em

$$z_0 = 0$$

e

$$5iz - 2z^2 + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{i}{2} \text{ e } z_2 = 2i$$

sendo z_0 de **ordem 2** e z_1 e z_2 **polos simples**. Apenas os polos z_0 e z_1 encontram-se no interior do círculo C , portanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta = \frac{1}{2i} 2\pi i \sum_{k=0}^1 \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

Onde

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d}{dz} (z - z_0)^2 \frac{z^4 - 1}{z^2 (-2z^2 + 5iz + 2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{z^4 - 1}{z^2 (-2z^2 + 5iz + 2)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 - 1}{(-2z^2 + 5iz + 2)} \\ &= \frac{5i}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f(z), z_1) &= \frac{z_1^4 - 1}{[z^2 (-2z^2 + 5iz + 2)]' \Big|_{z=z_1}} \\ &= \frac{z_1^4 - 1}{-8z_1^3 + 15iz_1^2 + 4z_1} \\ &= -\frac{5i}{4}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{5 - 4\operatorname{sen} \theta} d\theta = 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

1ª Prova

1º Semestre

2025

Data: 10 de Abril de 2025

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Determine dois números complexos cujo produto é 2 e a diferença entre eles é $\mathbf{i}$.*

Problema 2 *Encontre um número complexo z tal que $3 + \mathbf{i}$, $4 + 4\mathbf{i}$ e z sejam vértices de um triângulo retângulo.*

Problema 3 *Encontre todas as soluções da equação complexa*

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Problema 4 *Determine onde a função é diferenciável.*

a). $f(z) = (x - 1)^2 + \mathbf{i}y^2 + z^2$

b). $f(z) = x + \mathbf{i} |y|$

Problema 5

a). *Faça um estudo sobre a continuidade da função*

$$f(z) = e^z$$

b). *Calcule o limite*

$$\lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} e^{\frac{z^2 + \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}}}$$

Problema 6 (Extra) *Resolva a equação*

$$(z + 1)^5 = z^5$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Segunda-feira, 14 de Abril

2025
Turma E5

Exercício 1 Sejam z_1, z_2 números complexos tais que

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 2 \\ z_1 - z_2 = i \end{cases}$$

De acordo com a segunda equação deste sistema,

$$z_1 = z_2 + i$$

Logo, substituindo na primeira equação, tem-se

$$(z_2 + i) z_2 = 2 \Rightarrow$$

$$z_2^2 + i z_2 - 2 = 0$$

Ou seja,

$$z_2 = \frac{-i \pm \sqrt{7}}{2}$$

e

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + i \\ &= \frac{-i \pm \sqrt{7}}{2} + i \\ &= \frac{i \pm \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{cases} z_1 = \frac{i + \sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \frac{-i + \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} z_1 = \frac{i - \sqrt{7}}{2} \\ z_2 = \frac{-i - \sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

Exercício 2 Considere o número complexo

$$\begin{aligned} z_1 &= (4 + 4i) - (3 + i) \\ &= 1 + 3i \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned} w &= \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \\ &= i \end{aligned}$$

representa uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ radianos no sentido antihorário, logo o complexo

$$\begin{aligned} z_2 &= w z_1 \\ &= i(1 + 3i) \\ &= -3 + i \end{aligned}$$

é ortogonal ao vetor representado por z_1 , o seja

$$\begin{aligned} z_3 &= (3 + i) + \alpha z_2, \forall \alpha \in \mathbb{R} \\ &= (3 + i) + \alpha(-3 + i) \\ &= 3(1 - \alpha) + i(1 + \alpha) \end{aligned}$$

em particular, para $\alpha = 1$, tem-se

$$z_3 = 2i$$

e os complexos $3 + i$, $4 + 4i$ e $2i$, formam um triângulo retângulo. ■

Exercício 3 Deseja-se encontrar todas as raízes da equação

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Para isso, observe que

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}, z \neq 1$$

Logo, a equação que se deseja resolver, torna-se

$$\frac{1 - z^5}{1 - z} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - z^5 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[5]{1}$$

Ou seja

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$$

Em outras palavras,

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}$$

Obs.: Esta questão foi cancelada. O termo z^3 foi esquecido por este professor e os pontos referentes à questão foram dados aos que participaram da prova. ■

Exercício 4

a). Considere $z = x + iy$ e observe que a função pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} f(z) &= (x-1)^2 + iy^2 + z^2 \\ &= (x-1)^2 + iy^2 + (x+iy)^2 \\ &= (x-1)^2 + iy^2 + x^2 + 2xyi - y^2 \\ &= (x-1)^2 + x^2 - y^2 + i(y^2 + 2xy) \\ &= u(x, y) + i v(x, y) \end{aligned}$$

sendo

$$u(x, y) = (x-1)^2 + x^2 - y^2$$

$$v(x, y) = y^2 + 2xy$$

Logo

$$u_x = 2(2x-1)$$

$$u_y = -2y$$

$$v_x = 2y$$

$$v_y = 2y + 2x$$

Perceba que u , v , u_x , u_y , v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Usando as equações de **Cauchy-Euler**, ou seja

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \Rightarrow x - y = 1$$

Ou seja, a função f é diferenciável apenas para os complexos sobre a reta $x - y = 1$. □

b). Considere agora a função

$$f(z) = x + i|y|$$

Perceba que, para $y > 0$, tem-se

$$f(z) = x + iy$$

Sendo

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = y$$

Logo

$$u_x = 1$$

$$u_y = 0$$

$$v_x = 0$$

$$v_y = 1$$

Perceba que u , v , u_x , u_y , v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Usando as equações de **Cauchy-Euler**, ou seja

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

O que nos permite afirmar que f é diferenciável para $z \in \mathbb{C}$, com $y > 0$. Por outro lado, para $y < 0$ tem-se

$$f(z) = x - iy$$

Sendo

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = -y$$

Logo

$$u_x = 1$$

$$u_y = 0$$

$$v_x = 0$$

$$v_y = -1$$

Perceba que u , v , u_x , u_y , v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$. Novamente, pelas equações de **Cauchy-Euler**, tem-se que f não é diferenciável para $z \in \mathbb{C}$, com $y < 0$. Por fim, quando $y = 0$, ou seja os complexos sobre o eixo real, considere um complexo qualquer $z_0 = x_0$ e os caminhos

$$C_0 : \Delta z = it, t \rightarrow 0^+$$

$$C_1 : \Delta z = it, t \rightarrow 0^-$$

Observe que, sobre C_0 , tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \mathbf{i}t) - f(x_0)}{\mathbf{i}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{x_0 + \mathbf{i}t - x_0}{\mathbf{i}t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Porém, sobre C_1 , tem-se

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \mathbf{i}t) - f(x_0)}{\mathbf{i}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{x_0 - \mathbf{i}t - x_0}{\mathbf{i}t} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ou seja, f não é diferenciável para os complexos z , com $y = 0$. ■

Exercício 5

a). Considere $z = x + \mathbf{i}y$ e observe que a função em questão pode ser rescrita da seguinte maneira

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z \\ &= e^x (\cos y + \mathbf{i} \sin y) \\ &= e^x \cos y + \mathbf{i} e^x \sin y \\ &= u(x, y) + \mathbf{i} v(x, y) \end{aligned}$$

Sendo

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos y \\ v(x, y) &= e^x \sin y \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y \\ u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y \\ v_y &= e^x \cos y \end{aligned}$$

Perceba que u , v , u_x , u_y , v_x e v_y são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$ e que,

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Ou seja, as equações de **Cauchy-Euler** são verdadeiras para todos os números complexos. Conclui-se portanto que f é diferenciável em todo o $\mathbb{C}$ e, conseqüentemente, contínua em todo o $\mathbb{C}$. □

b). Deseja-se calcular o limite

$$\lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}} \right)}$$

Tendo em vista que e^z é contínua em todo o $\mathbb{C}$ segue-se que

$$\lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}} \right)} = e^{\left(\lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} \frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}} \right)}$$

e, usando a **Regra de L'Hospital**,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} e^{\left(\frac{z^2 - \pi^2}{z + \pi \mathbf{i}} \right)} &= e^{\left(\lim_{z \rightarrow -\pi \mathbf{i}} 2z \right)} \\ &= e^{-2\pi \mathbf{i}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

■

Exercício 6 Observe que

$$\begin{aligned} (z-1)^5 &= z^5 & \Rightarrow \\ \frac{(z-1)^5}{z^5} &= 1 & \Rightarrow \\ \left(\frac{z-1}{z} \right)^5 &= 1 & \Rightarrow \\ \frac{z-1}{z} &= \sqrt[5]{1} & \Rightarrow \\ z-1 &= \sqrt[5]{1} z & \Rightarrow \\ z - \sqrt[5]{1} z &= 1 & \Rightarrow \\ z \left(1 - \sqrt[5]{1} \right) &= 1 & \Rightarrow \\ z &= \frac{1}{\left(1 - \sqrt[5]{1} \right)} \end{aligned}$$

Onde

$$\sqrt[5]{1} = e^{\frac{2k\pi}{5}}, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

2ª Prova

1º Semestre

2025

Data: 27 de Maio de 2025

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Encontre todas as soluções da equação*

$$\operatorname{sen}(\cos w) = 0$$

Problema 2 *Considere*

$$f(z) = z^{\operatorname{sen} z}$$

onde o valor principal da potenciação está sendo usado. Calcule $f'(i)$.

Problema 3 *Calcule*

a). $\int_C (x^2 - iy^3) dz$ sendo C a metade inferior da circunferência $|z| = 1$, de $z = -1$ a $z = 1$

b). $\int_C e^z dz$ sendo C a linha poligonal que conecta os pontos de $z = 0$, $z = 2$ e $z = 1 + \pi i$ (nessa ordem).

Problema 4 *Calcule*

$$\oint_C \frac{dz}{1 - e^z}$$

em torno da circunferência $|z| = 3$.

Problema 5 *Suponha que f é analítica para $|z| < 2$ e $f(0) = f'(0) = 1$. Calcule*

$$\int_C (\operatorname{Re} z + 1) \frac{f(z)}{z} dz$$

sendo C a circunferência $|z| = 1$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Domingo, 01 de Junho

2025
Turma E5

Exercício 1 Observe que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\cos w) &= 0 & \Rightarrow \\ \frac{e^{\mathbf{i} \cos w} - e^{-\mathbf{i} \cos w}}{2\mathbf{i}} &= 0 & \Rightarrow \\ e^{\mathbf{i} \cos w} - \frac{1}{e^{\mathbf{i} \cos w}} &= 0 & \Rightarrow \\ e^{2\mathbf{i} \cos w} - 1 &= 0 & \Rightarrow \\ 2\mathbf{i} \cos w &= \ln 1 & \Rightarrow \\ 2\mathbf{i} \cos w &= \ln |1| + \mathbf{i} \arg 1 & \Rightarrow \\ 2\mathbf{i} \cos w &= 2k\pi\mathbf{i} & \Rightarrow \\ \cos w &= k\pi & \Rightarrow \\ \frac{e^{w\mathbf{i}} + e^{-w\mathbf{i}}}{2} &= k\pi & \Rightarrow \\ e^{2w\mathbf{i}} + 1 &= 2k\pi e^{w\mathbf{i}} & \Rightarrow \\ e^{2w\mathbf{i}} - 2k\pi e^{w\mathbf{i}} + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Considere

$$\xi = e^{w\mathbf{i}}$$

e perceba que a equação anterior torna-se

$$\xi^2 - 2k\pi\xi + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$\xi_1 = k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1}$$

$$\xi_2 = k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1}$$

Assim, para $\xi = \xi_1$, tem-se

$$\begin{aligned} \xi_1 &= e^{w\mathbf{i}} \Rightarrow \\ w\mathbf{i} &= \ln \xi_1 \Rightarrow \\ w &= -\mathbf{i} \ln \left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \right) \\ &= -\mathbf{i} \left[\ln \left| k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{i} \arg \left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \right) \right] \\ &= -\mathbf{i} \ln \left(k\pi + \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \right) + 2n\pi \end{aligned}$$

e para $\xi = \xi_2$, procedendo do mesmo modo, tem-se

$$w = -\mathbf{i} \ln \left(k\pi - \sqrt{k^2\pi^2 - 1} \right) + 2n\pi$$

com $k, n \in \mathbb{Z}$. ■

Exercício 2 Observe que a função

$$f(z) = z^{\operatorname{sen} z}$$

pode ser reescrita como

$$f(z) = e^{\operatorname{sen} z \operatorname{Ln} z}$$

e usando a regra da cadeia, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^{\operatorname{sen} z \operatorname{Ln} z} [\operatorname{sen} z \operatorname{Ln} z]' \\ &= z^{\operatorname{sen} z} \left(\cos z \operatorname{Ln} z + \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right) \end{aligned}$$

assim,

$$f'(\mathbf{i}) = \mathbf{i}^{\operatorname{sen} \mathbf{i}} \left(\cos \mathbf{i} \operatorname{Ln} \mathbf{i} + \frac{\operatorname{sen} \mathbf{i}}{\mathbf{i}} \right)$$

Lembrando que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} i &= \frac{e^{-1} - e}{2i} \\ &= \sinh(1) i \\ \cos i &= \frac{e^{-1} + e}{2} \\ &= \cosh(1) \\ \operatorname{Ln} i &= \ln|i| + i\operatorname{Arg}(i) \\ &= \frac{\pi}{2} i \\ i^{\operatorname{sen} i} &= e^{\operatorname{sen} i \operatorname{Ln} i} \\ &= e^{\sinh(1) i \frac{\pi}{2} i} \\ &= e^{-\sinh(1) \frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

Assim,

$$f'(i) = e^{-\sinh(1) \frac{\pi}{2}} \left[\cosh(1) \frac{\pi}{2} i + \sinh(1) \right]$$

■

Exercício 3

a). Uma parametrização possível para a curva C é dada por

$$\begin{aligned}z(t) &= e^{it} \\ &= \cos t + i \operatorname{sen} t, \quad -\pi \leq t \leq 0\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}A &= \int_C (x^2 - iy^3) dz \\ &= \int_{-\pi}^0 (\cos^2 t - i \operatorname{sen}^3 t) z'(t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 (\cos^2 t - i \operatorname{sen}^3 t) (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 (-\operatorname{sen} t \cos^2 t + i \cos^3 t + \\ &\quad + i \operatorname{sen}^3 t + \cos t \operatorname{sen}^3 t) dt \\ &= \int_{-\pi}^0 \left[-\operatorname{sen} t \cos^2 t + i (\cos t - \cos t \operatorname{sen}^2 t) + \right. \\ &\quad \left. + i (\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} t \cos^2 t) + \cos t \operatorname{sen}^3 t \right] dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= \int_{-\pi}^0 \left[-(1+i) \operatorname{sen} t \cos^2 t + (\cos t + \operatorname{sen} t - \right. \\ &\quad \left. - \cos t \operatorname{sen}^2 t) i + \cos t \operatorname{sen}^3 t \right] dt \\ &= \left[\frac{1}{3} (1+i) \cos^3 t + \left(\operatorname{sen} t - \cos t - \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t \right) i + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 t \right]_{-\pi}^0 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} i\end{aligned}$$

□

b). Tendo em vista que a função sob a integral é **analítica** em todo o plano complexo, a integral dada não depende do caminho e sim dos seus pontos inicial e final. Usando o **Teorema Fundamental para Integrais de Linha**, tem-se que

$$\begin{aligned}\int_C e^z dz &= \int_0^{1+\pi i} e^z dz \\ &= e^z \Big|_0^{1+\pi i} \\ &= e^{1+\pi i} - e^0 \\ &= e(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) - 1 \\ &= -e - 1\end{aligned}$$

■

Exercício 4 Inicialmente observe que as singularidades da função sob a integral são os complexos tais que

$$1 - e^z = 0$$

ou seja

$$\begin{aligned}z &= \operatorname{Ln} 1 \\ &= \ln|1| + i \operatorname{Arg}(1) \\ &= 0\end{aligned}$$

que está dentro da curva $|z| = 3$. Sabendo que

$$\begin{aligned}e^z &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\end{aligned}$$

e usando a **primeira fórmula integral de Cauchy**, segue-se que

$$\begin{aligned}
 \oint_C \frac{dz}{1 - e^z} &= \oint_C \frac{dz}{-z - \frac{z^2}{2} - \dots - \frac{z^n}{n!} - \dots} \\
 &= \oint_C \frac{dz}{z \left(-1 - \frac{z}{2} - \dots - \frac{z^{n-1}}{n!} - \dots \right)} \\
 &= \oint_C \frac{1}{z \left(-1 - \frac{z}{2} - \dots - \frac{z^{n-1}}{n!} - \dots \right)} dz \\
 &= 2\pi i \left. \frac{1}{-1 - \frac{z}{2} - \dots - \frac{z^{n-1}}{n!} - \dots} \right|_{z=0} \\
 &= -2\pi i
 \end{aligned}$$

Obs.: Questão cancelada. O conteúdo sobre séries não foi abordado. ■

Exercício 5 Observe que

$$\begin{aligned}
 \int_C (\operatorname{Re} z + 1) \frac{f(z)}{z} dz &= \int_C \left(\frac{z + \bar{z}}{2} + 1 \right) \frac{f(z)}{z} dz \\
 &= \int_C \left(\frac{z}{2} + \frac{\bar{z} z}{2z} + 1 \right) \frac{f(z)}{z} dz \\
 &= \int_C \left(\frac{z}{2} + \frac{|z|^2}{2z} + 1 \right) \frac{f(z)}{z} dz \\
 &= \int_C \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{2z} + 1 \right) \frac{f(z)}{z} dz \\
 &= \int_C \left(\frac{f(z)}{2} + \frac{f(z)}{z} + \frac{f(z)}{2z^2} \right) dz
 \end{aligned}$$

Uma vez que f é analítica na região $|z| < 2$ e a curva C dada por $|z| = 1$ está dentro desta região, segue-se do **Teorema de Cauchy-Goursat** que

$$\int_C \frac{f(z)}{2} dz = 0$$

e das **fórmulas integrais de Cauchy**, que

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{f(z)}{z} dz &= 2\pi i f(0) \\
 &= 2\pi i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_C \frac{f(z)}{2z^2} dz &= \pi i f'(0) \\
 &= \pi i
 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_C (\operatorname{Re} z + 1) \frac{f(z)}{z} dz = 3\pi i$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

3^a Prova

1^o Semestre

2025

Data: 03 de Julho de 2025

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 Calcule

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz$$

Problema 2 Dada a função

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z^2)},$$

localize seus polos e classifique-os.

Problema 3 Calcule a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

em todos as suas singularidades.

Problema 4 Resolva a integral

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{2 - \cos \theta}$$

Problema 5 Resolva a integral

$$\oint \frac{dz}{\bar{z} - b}$$

em torno da curva $|z| = a > 0$. Considere $a < |b|$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Prof.º Edson

1º Semestre

Gabarito 3ª Prova
Data: Segunda-feira, 7 de Julho

2025
Turma E5

Exercício 1 Inicialmente observe que a função

$$f(z) = z \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right)$$

possui apenas um polo em $z_0 = 0$ e este está dentro da curva $|z| = 2$. Logo, de acordo com o **Teorema dos Resíduos**, tem-se que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz = \operatorname{Res}(f, z_0)$$

Uma das maneiras de se realizar este cálculo é através da **série de Laurent** da função f em torno de $z = z_0$. Para isto, perceba que

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z} \right)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z}{(2n+1)! z^{2n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)! z^{2n}} \\ &= 1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120z^4} + \dots \end{aligned}$$

Ou seja,

$$f(z) = 1 - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120z^4} + \dots$$

e,

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = a_{-1} = 0$$

Portanto,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} z \operatorname{sen} \left(\frac{1}{z} \right) dz = 0$$

Exercício 2 Os polos da função

$$f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen}(z^2)}$$

correspondem aos valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$\operatorname{sen}(z^2) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z^2 = k\pi \quad \Rightarrow$$

$$z = \sqrt{k\pi}, k \in \mathbb{Z}$$

Considere

$$g(z) = \operatorname{sen}(z^2)$$

e observe que, para $k \neq 0$

$$g'(z) = 2z \cos(z^2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} g'(z_k) &= 2z_k \cos(z_k^2) \\ &= 2(\sqrt{k\pi}) \cos(k\pi) \\ &= 2\sqrt{k\pi} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Ou seja, $z_k, k \neq 0$, são **polos simples** da função f . Para $k = 0$, tem-se

$$\begin{aligned} g'(z_0) &= 2(0) \cos(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$g''(z) = 2 \cos(z^2) - 4z^2 \operatorname{sen}(z^2) \quad \Rightarrow$$

$$g''(z_0) = 2 \cos(0)$$

$$= 2$$

$$\neq 0$$

e z_0 é portanto, um **polo de ordem 2** da função f . ■

Exercício 3 Deseja-se calcular a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Considere

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + 1}$$

■

e observe que

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6 + 1} = \frac{x^4}{x^6 + 1} = f(x)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Para o cálculo da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

perceba inicialmente que o denominador é polinomial e possui grau 2 unidades a mais que o numerador que também é polinomial. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \int_C \frac{z^4}{z^6 + 1} dz \\ &= 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde C é a curva fechada formada pela reta sobre o eixo x , com $-R \leq x \leq R$ e o arco correspondente à metade superior do círculo $|z| = R$ com $R \in \mathbb{R}$ grande o suficiente para que C contenha em seu interior todos os polos z_k de $f(z)$ que estão acima do eixo x .

Os polos de $f(z)$ são obtidos como zeros da função

$$g(z) = z^6 + 1$$

Ou seja,

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$z_k = \sqrt[6]{-1}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

com $k = 0, 1, 2$. Assim

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$z_1 = i$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$$

são **polos simples**, uma vez que são raízes de multiplicidade 1 da função g e estão acima do eixo x .

Portanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= 2\pi i \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}(f, z_2) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^4}{6z_0^5} + \frac{z_1^4}{6z_1^5} + \frac{z_2^4}{6z_2^5} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3} + i} + \frac{1}{i} + \frac{2}{-\sqrt{3} + i} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■

Exercício 4 Considere

$$f(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta}$$

e observe que

$$f(-\theta) = \frac{\cos(-2\theta)}{2 - \cos(-\theta)} = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} = f(\theta)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Para o cálculo desta integral considere a curva

$$|z| = 1$$

cujas parametrização é dada por

$$C: z(\theta) = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta < \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{z + z^{-1}}{2}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_C \frac{1 - 2 \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2}{2 - \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^4 + 1}{z^2 (z^2 - 4z + 1)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} 2\pi i \sum \operatorname{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2 (z^2 - 4z + 1)}$$

e z_k são os polos de f no interior da curva C .

Calculando os polos de f , encontra-se

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Sendo z_0 um **polo ordem 2**, z_1 e z_2 **polos simples** mas, apenas z_0 e z_1 estão no interior da curva C . Calculando agora os resíduos,

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 2 \frac{z^5 - 6z^4 + 2z^3 - z + 2}{z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, z_1) &= \frac{z^4 + 1}{[z^2 (z^2 - 4z + 1)]'} \Big|_{z=z_1} \\ &= \frac{z_1^4 + 1}{z_1^2 (z_1 - z_2)} \\ &= -\frac{7}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= -\pi [\operatorname{Res}(f, z_0) + \operatorname{Res}(f, z_1)] \\ &= -\pi \left(4 - \frac{7}{3} \sqrt{3} \right) \\ &= \left(\frac{7}{3} \sqrt{3} - 4 \right) \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Observe que

$$\begin{aligned} \oint \frac{dz}{\bar{z} - b} &= \oint \frac{dz}{\frac{\bar{z}}{z} - b} \\ &= \oint \frac{dz}{\frac{|z|^2}{z} - b} \\ &= \oint \frac{z dz}{|z|^2 - bz} \end{aligned}$$

Como a curva em questão é dada por $|z| = a$, segue-se que

$$\oint \frac{dz}{\bar{z} - b} = \oint \frac{z dz}{a^2 - bz}$$

onde z_k são os polos da função

$$f(z) = \frac{z}{a^2 - bz}$$

que são obtidos como soluções da equação

$$a^2 - bz = 0$$

Ou seja

$$z_0 = \frac{a^2}{b}$$

é o único polo da função f e é um polo simples, uma vez que é um zero de multiplicidade 1 da equação anterior. Além disso, sabe-se que

$$a < |b|$$

Ou seja,

$$0 < a < b \Rightarrow 0 < a^2 < ab \Rightarrow 0 < \frac{a^2}{b} < a$$

e disto conclui-se que z_0 está dentro da curva $|z| = a$. Do Teorema dos Resíduos, segue-se que

$$\begin{aligned}\oint \frac{dz}{\bar{z} - b} &= 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) \\ &= 2\pi i \left. \frac{z}{(a^2 - bz)'} \right|_{z=z_0} \\ &= -2\pi i \frac{z_0}{b} \\ &= -2\pi i \left(\frac{a}{b} \right)^2\end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Métodos Matemáticos - Turma E5

Prof^o. Edson

Prova Final

1^o Semestre

2025

Data: 08 de Julho

Duração: 16:00 - 18:00

Problema 1 *Encontre todas as soluções da equação complexa*

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Problema 2 *Seja*

$$f(z) = \operatorname{Re}(z).$$

Calcule $f'(0)$.

Problema 3 *Encontre **todas** as soluções possíveis para a equação*

$$(\operatorname{Ln} z)^2 + \operatorname{Ln} z = -1$$

Problema 4 *Resolva a integral*

$$\int_0^\pi \frac{\cos 2\theta \, d\theta}{2 - \cos \theta}$$

Problema 5 *Calcule a integral*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Métodos Matemáticos

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Quinta-feira, 10 de Julho

2025
Turma E5

Exercício 1 Deseja-se encontrar todas as raízes da equação

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$$

Para isso, observe que

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = \frac{1 - z^5}{1 - z}, z \neq 1$$

Logo, a equação que se deseja resolver, torna-se

$$\frac{1 - z^5}{1 - z} = 0 \Rightarrow$$

$$1 - z^5 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \sqrt[5]{1}$$

Ou seja

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5}, k = 1, 2, 3, 4$$

Em outras palavras,

$$z_1 = \cos \frac{2\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos \frac{4\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos \frac{6\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{6\pi}{5}$$

$$z_4 = \cos \frac{8\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{8\pi}{5}$$

Exercício 2 Considerando $z = x + iy$, a função em questão pode ser reescrita como

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

onde

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = 0$$

Observe que

$$u_x(x, y) = 1$$

$$u_y(x, y) = 0$$

$$v_x(x, y) = 0$$

$$v_y(x, y) = 0$$

e usando as equações de **Cauchy-Riemann**, observe que

$$u_x(x, y) \neq v_y(x, y), \forall z \in \mathbb{C}$$

Ou seja, f não é diferenciável em todo $\mathbb{C}$, portanto $f'(0)$ não existe. ■

Exercício 3 Considerando

$$w = \operatorname{Ln} z$$

a equação em questão torná-se

$$w^2 + w + 1 = 0$$

cujas soluções são

$$w_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

Para $w = w_1$, tem-se

$$\operatorname{Ln} z = w_1 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_1}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} + i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

e para $w = w_2$,

$$\operatorname{Ln} z = w_2 \Rightarrow$$

$$z = e^{w_2}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}} e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} - i \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Exercício 4 Considere

$$f(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta}$$

e observe que

$$f(-\theta) = \frac{\cos(-2\theta)}{2 - \cos(-\theta)} = \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} = f(\theta)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \end{aligned}$$

Para o cálculo desta integral considere a curva

$$|z| = 1$$

cujas parametrização é dada por

$$C : z(\theta) = e^{i\theta}, -\pi \leq \theta < \pi$$

Disto segue-se que

$$dz = e^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z - z^{-1}}{2i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ &= \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^\pi \frac{1 - 2\sin^2 \theta}{2 - \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_C \frac{1 - 2 \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^2}{2 - \frac{z + z^{-1}}{2}} \frac{dz}{iz} \\ &= -\frac{1}{2i} \int_C \frac{z^4 + 1}{z^2 (z^2 - 4z + 1)} dz \\ &= -\frac{1}{2i} 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2 (z^2 - 4z + 1)}$$

e z_k são os polos de f no interior da curva C .

Calculando os polos de f , encontra-se

$$z_0 = 0$$

$$z_1 = 2 - \sqrt{3}$$

$$z_2 = 2 + \sqrt{3}$$

Sendo z_0 um **polo ordem 2**, z_1 e z_2 **polos simples** mas, apenas z_0 e z_1 estão no interior da curva C . Calculando agora os resíduos,

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{z^4 + 1}{z^2 - 4z + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} 2 \frac{z^5 - 6z^4 + 2z^3 - z + 2}{z^4 - 8z^3 + 18z^2 - 8z + 1} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_1) &= \frac{z^4 + 1}{[z^2 (z^2 - 4z + 1)]'} \Big|_{z=z_1} \\ &= \frac{z_1^4 + 1}{z_1^2 (z_1 - z_2)} \\ &= -\frac{7}{3} \sqrt{3} \end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\cos 2\theta}{2 - \cos \theta} d\theta &= -\pi \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) \right] \\ &= -\pi \left(4 - \frac{7}{3} \sqrt{3} \right) \\ &= \left(\frac{7}{3} \sqrt{3} - 4 \right) \pi \end{aligned}$$

■

Exercício 5 Deseja-se calcular a integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Considere

$$f(x) = \frac{x^4}{x^6 + 1}$$

e observe que

$$f(-x) = \frac{(-x)^4}{(-x)^6 + 1} = \frac{x^4}{x^6 + 1} = f(x)$$

Ou seja, f é uma função par e disto segue-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

Para o cálculo da integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx$$

perceba inicialmente que o denominador é polinomial e possui grau 2 unidades a mais que o numerador que também é polinomial. Assim,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \int_C \frac{z^4}{z^6 + 1} dz \\ &= 2\pi i \sum \text{Res}(f, z_k) \end{aligned}$$

onde C é a curva fechada formada pela reta sobre o eixo x , com $-R \leq x \leq R$ e o arco correspondente à metade superior do círculo $|z| = R$ com $R \in \mathbb{R}$ grande o suficiente para que C contenha em seu interior todos os polos z_k de $f(z)$ que estão acima do eixo x .

Os polos de $f(z)$ são obtidos como zeros da função

$$g(z) = z^6 + 1$$

Ou seja,

$$z^6 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$z_k = \sqrt[6]{-1}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)$$

com $k = 0, 1, 2$. Assim

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$z_1 = i$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}$$

são **polos simples**, uma vez que são raízes de multiplicidade 1 da função g e estão acima do eixo x . Portanto

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= 2\pi i \left[\text{Res}(f, z_0) + \text{Res}(f, z_1) + \right. \\ &\quad \left. + \text{Res}(f, z_2) \right] \\ &= 2\pi i \left(\frac{z_0^4}{6z_0^5} + \frac{z_1^4}{6z_1^5} + \frac{z_2^4}{6z_2^5} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \\ &= \frac{\pi i}{3} \left(\frac{2}{\sqrt{3} + i} + \frac{1}{i} + \frac{2}{-\sqrt{3} + i} \right) \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

e, por fim,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

■