Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2ª Prova **2025**
Data: Segunda-feira, 14 de Julho **Turma FC**

Exercício 1 *Suponha que*

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n,$$

para $n > 1$. Segue-se disto, que

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq \frac{|x+h-x|^n}{|h|} = |h|^{n-1}$$

Ou seja,

$$-|h|^{n-1} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq |h|^{n-1}$$

Logo, fazendo $h \to 0$ e, usando o ***teorema do Confronto****, tem-se que*

$$0 \leq f'(x) \leq 0$$

Ou seja, $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto, f é constante. ■

Exercício 2 *Considere*

$$g(x) = f(xy)$$

e usando a ***regra da cadeia****, segue-se que*

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(xy)\,(xy)' \\ &= \frac{1}{xy}y \\ &= \frac{1}{x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_1^x g'(x)dx &= \int_1^x f'(x)dx \quad \Rightarrow \\ g(x)\Big|_1^x &= f(x)\Big|_1^x \quad \Rightarrow \\ g(x) - g(1) &= f(x) - f(1) \quad \Rightarrow \\ f(xy) - f(y) &= f(x) - f(1) \end{aligned}$$

Sabendo que $f(1) = 0$, tem-se portanto, que

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

■

Exercício 3

a). *Usando a* ***regra de L'Hôspital****, tem-se que*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x}{\operatorname{sen} x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x \operatorname{sen} x}{\cos x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

b). *Novamente, usando a* ***regra de L'Hôspital****,*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(-\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 *De acordo com a definição, tem-se que*

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^2} \end{aligned}$$

Observe que $g(h)$ e h^2 são ambas nulas quando $h = 0$ e da ***regra de L'Hôspital****, segue-se que*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{2h}$$

Novamente, tem-se que $g'(h)$ e $2h$ são ambas nulas quando $h = 0$ e da ***regra de L'Hôspital****, tem-se*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{17}{2}$$

■

Exercício 5 *Considere*

$$f(x) = x^3 + px + q$$

Para que f tenha um ***mínimo*** *em $x = 3$ é necessário que*

$$f'(3) = 0$$

Ou seja

$$27 + p = 0 \Rightarrow p = -27$$

e para que o mínimo tenha valor 5, é necessário que

$$f(3) = 5$$

Ou seja

$$27 - 81 + q = 5 \Rightarrow q = 59$$

■