Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof°. Edson

1° Semestre

Gabarito Prova Final **2018**
Data: Segunda-feira, 30 de Julho **Turma FC**

Exercício 1

a). *Deseja-se calcular o limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r},\, r>0$$

Antes disto, observe que

$$x \to +\infty \Rightarrow \ln x \to +\infty \, e \, x^r \to +\infty \, (pois \, r>0)$$

*Ou seja, para esta situação a **Regra de L'Hospital** pode ser aplicada. Procedendo desta forma, tem-seque*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{rx^{r-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x\,r\,x^{r-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{r\,x^r}\\ &= 0\end{aligned}$$

□

b). *Para o cálculo do limite*

$$\lim_{x\to+\infty} x^r e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x}$$

Observe que

$$x \to +\infty \Rightarrow e^x \to +\infty \, e \, x^r \to +\infty \, (pois \, r>0)$$

*Ou seja, a **Regra de L'Hospital** pode ser aplicada e disto segue-se que*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^r e^{-x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^r}{e^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{rx^{r-1}}{e^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{r(r-1)x^{r-2}}{e^x}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{r(r-1)(r-2)x^{r-3}}{e^x}\\ &= \cdots\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{r!}{e^x}\\ &= 0\end{aligned}$$

■

Exercício 2 *Considere a função*

$$h(x) = \sqrt{x},\, x \geq 0$$

Dado um $\epsilon > 0$, *tome* $\delta = |\sqrt{a}|\,\epsilon$ *e suponha que*

$$|x-a| < \delta$$

observe que

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| &= \left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\\ &= \left|\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right|\\ &= \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}\end{aligned}$$

Porém,

$$|\sqrt{x}+\sqrt{a}| \geq |\sqrt{a}| \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\sqrt{a}|} \geq \frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{a}|}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right| &= \frac{|x-a|}{|\sqrt{x}+\sqrt{a}|}\\
&\le \frac{|x-a|}{|\sqrt{a}|}\\
&< \frac{\delta}{|\sqrt{a}|}\\
&= \frac{|\sqrt{a}|\,\epsilon}{|\sqrt{a}|}\\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Ou seja, a função h é contínua em $x = a$ para qualquer $a \ge 0$.

Percebe agora que

$$g(x) = h(f(x))$$

e como $f(x)$ é continua para $x = a$ e $h(x)$ é contínua para qualquer $a \ge 0$, segue-se da ***continuidade da composição de funções contínuas*** *que g também é continua em $x = a$, uma vez que $f(x) \ge 0$.* ■

Exercício 3 *Usando a definição de derivada, tem-se que*

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}
\end{aligned}$$

Sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{x}\right), & se\, x \ne 0\\ 0, & se\, x = 0\end{cases}$$

Segue-se que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^3\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}$$

Assim, se $h \to 0^+$ tem-se

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{h^3\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} h^2\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

uma vez que

$$h^2 \to 0 \text{ e } \left|\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)\right| \le 1$$

Do mesmo modo, quando $h \to 0^-$ tem-se

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{-h^3\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{1}{h}\right)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} -h^2\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)\\
&= -\lim_{h\to 0} h^2\mathrm{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(0) = 0$$

■

Exercício 4 *Considere a função*

$$\alpha(x) = \int_x^{x+p} f(t)dt$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ é portanto integrável em $\mathbb{R}$ e assim, seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que

$$F'(t) = f(t)$$

Segue-se disto que

$$\begin{aligned}
\alpha(x) &= \int_x^{x+p} f(t)dt\\
&= F(t)\Big|_x^{x+p}\\
&= F(x+p) - F(x)
\end{aligned}$$

Usando a ***regra da cadeia***, *tem-se que*

$$\begin{aligned}
\alpha'(x) &= F'(x+p)\frac{d}{dx}(x+p) - F'(x)\\
&= F'(x+p) - F'(x)\\
&= f(x+p) - f(x)
\end{aligned}$$

Como f é periódica de período p, ou seja

$$f(x+p) = f(x),$$

Segue-se que

$$\alpha'(x) = 0$$

Ou seja, a função α é constante. Assim,

$$\alpha(x) = \alpha(0) = k, k \in \mathbb{R}$$

Escrito de outra forma,

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

■

Exercício 5 *Considere*

$$\alpha(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\log t}{1+t^2} dt$$

e seja F uma função tal que

$$F'(t) = \frac{\log t}{1+t^2}$$

A existência de tal função é garantida dada a ***continuidade*** *das funções $\log t$ e $1+t^2$, para todo $t > 0$. Assim,*

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\log t}{1+t^2} dt \\ &= F(t)\Big|_{\frac{1}{x}}^{x} \\ &= F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

Usando a ***regra da cadeia****, tem-se*

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= F'(x) - F'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= F'(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\log \frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\log x^{-1}}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} - \frac{\log x}{\frac{x^2+1}{x^2}x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} - \frac{\log x}{1+x^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\alpha(x) = k,\ k \in \mathbb{R},\ x > 0$$

Observe que

$$\alpha(1) = \int_1^1 \frac{\log t}{1+t^2} dt = 0$$

Portanto,

$$\alpha(x) = 0,\ x > 0$$

Escrevendo de outro modo,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\log t}{1+t^2} dt = 0,\ x > 0$$

■