Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof^{o}. Edson

1^{o} Semestre

Gabarito 2^{a} Prova **2018**
Data: Sexta-feira, 20 de Julho **Turma FC**

Exercício 1 *Para calcular a integral*

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = 1 + x^2$$

e observe que

$$du = 2xdx$$

e

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

Ou seja

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{du}{u} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln u\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2$$

$$= \ln\sqrt{2}$$

Como a função

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

é integrável, segue-se que o resultado obtido deve ser o mesmo para qualquer partição do intervalo $[0,1]$. *Escolhendo a partição*

$$P : 1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

onde

$$x_i = \frac{i}{n},\ i = 0, \ldots, n$$

Segue-se da definição de integral deRieman que

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

sendo

$$\Delta x = \max \Delta x_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Observe que

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

$$= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}$$

$$= \frac{1}{n}$$

Ou seja,

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

e

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow n \to +\infty$$

Portanto

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)$$

Para qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. *Tomando*

$$c_i = x_i = \frac{i}{n}$$

tem-se

$$f(c_i) = f\left(\frac{i}{n}\right)$$

$$= \frac{\frac{i}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{i}{n}}{\frac{n^2+i^2}{n^2}}$$

$$= \frac{i}{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}$$

$$= \frac{in}{n^2+i^2}$$

Com isto,

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(c_i) \qquad (2)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{in}{n^2+i^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2}$$

Portanto, de (1) e (2), segue-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2+i^2} = \ln\sqrt{2}$$

■

Exercício 2 *Considere*

$$I_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt,\ 0 \le n \le N$$

sendo f uma função com derivadas contínuas até a ordem N num intervalo $[a,b]$. Usando integração por partes para calcular a integral dada, tome

$$\begin{cases} u = \dfrac{(x-t)^n}{n!} \\ dv = f^{(n+1)}(t)dt \end{cases}$$

Segue-se que

$$\begin{cases} du = \dfrac{-n(x-t)^{n-1}}{n!}dt \\ \quad = -\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \\ v = f^{(n)}(t) \end{cases}$$

para $1 \le n \le N$. Logo

$$I_n(x) = uv\Big|_a^x - \int_a^x vdu$$

$$= \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!}\Big|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt$$

$$= -\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)}{(n-1)!}dt$$

$$= -\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + I_{n-1}(x)$$

■

Exercício 3 *Sabe-se que*

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \lim_{b\to+\infty} \int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^r}$$

Considere

$$v = \ln x$$

e observe que

$$dv = \frac{dx}{x}$$

Além disso,

$$x = 2 \Rightarrow v = \ln 2$$

$$x = b \Rightarrow v = \ln b$$

Portanto

$$\int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dv}{v^r}$$

$$= \frac{v^{-r+1}}{-r+1}\Big|_{\ln 2}^{\ln b}$$

$$= \frac{v^{1-r}}{1-r}\Big|_{\ln 2}^{\ln b}$$

$$= \frac{(\ln b)^{1-r}}{1-r} - \frac{(\ln 2)^{1-r}}{1-r}$$

$$= \frac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r}$$

para $r \ne 1$. Disto segue-se que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r}\right]$$

Porém,

$$\lim_{b\to+\infty} (\ln b)^{1-r} = \begin{cases} +\infty, & se\, 1-r>0 \\ 0, & se\, 1-r<0 \end{cases}$$

Para $r=1$, a integral dada torna-se

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^b$$

$$= \lim_{b\to+\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)]$$

$$= +\infty - 2$$

$$= +\infty$$

Ou seja

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \begin{cases} +\infty, & se\, r \leq 1 \\ -(\ln 2)^{1-r} & se\, r > 1 \end{cases}$$

Em outras palavras, a integral dada converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$. ■

Exercício 4

a). *O termo geral da série em questão é dado por*

$$a_n = \left(\sqrt{3}\right)^{2n}(x+2)^n = 3^n(x+2)^n$$

Assim,

$$a_{n+1} = 3^{n+1}(x+2)^{n+1}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{3^{n+1}(x+2)^{n+1}}{3^n(x+2)^n}\right| = |3(x+2)| = 3|x+2|$$

Usando o teste da razão, esta série será convergente quando

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 3|x+2| < 1 & \quad \Leftrightarrow \\ |x+2| < \tfrac{1}{3} & \quad \Leftrightarrow \\ -\tfrac{1}{3} < x+2 < \tfrac{1}{3} & \quad \Leftrightarrow \\ -\tfrac{7}{3} < x < -\tfrac{5}{3} & \end{aligned}$$

Logo, a série dada é convergente para $x \in \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. □

b). *O termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \frac{3^n}{n^3}x^n$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}x^{n+1}$$

e

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3}x^{n+1}}{\frac{3^n}{n^3}x^n}\right| = \left|\frac{3n^3}{(n+1)^3}x\right| = 3\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right||x|$$

Usando o teste da razão, esta série será convergente quando

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} 3\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right||x| < 1 & \quad \Leftrightarrow \\ 3|x| \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^3}{(n+1)^3}\right| < 1 & \quad \Leftrightarrow \\ 3|x| < 1 & \quad \Leftrightarrow \\ |x| < \frac{1}{3} & \end{aligned}$$

Logo, a série dada é convergente para $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. ■

Exercício 5 *A área da região em questão é dada por*

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}dx \\ &= \lim_{b\to+\infty} -\frac{e^{-3x}}{3}\Big|_0^b \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{e^{-3b}}{3} + \frac{1}{3}\right] \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{3e^{3b}} + \frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

. ■