

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Mestrado Profissional em Matemática  
Fundamentos de Cálculo

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova

Data: Domingo, 15 de Julho

2018

Turma FC

**Exercício 1** Sabendo que a função  $f$  é contínua em  $x = 0$ , segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Para verificar-se a continuidade de  $f$  em  $x_0 \in \mathbb{R}$  é necessário calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Considere, portanto a seguinte mudança de variável

$$u = x - x_0$$

e observe que

$$x = u + x_0$$

e

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

Assim, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u + x_0)$$

Como

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{u \rightarrow 0} f(u)f(x_0) \\ &= f(x_0) \lim_{u \rightarrow 0} f(u) \\ &= f(x_0)f(0) \\ &= f(x_0 + 0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Ou seja, a função  $f$  é contínua em  $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ . ■

**Exercício 2** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função tal que

$$f(x+1)f(f(x)+1)+1=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$f(x+1)f(f(x)+1)=-1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para  $x = 0$ , tem-se que

$$f(1)f(f(1)+1)=-1$$

Suponha que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , segue-se que existe um  $x_0$  entre 1 e  $f(1)+1$  tal que  $f(x_0) = 0$ . Tomando  $x = x_0 - 1$  e substituindo na relação dada, tem-se

$$f(x_0)f(f(x_0)-1)+1=-1$$

O que gera uma contradição. Portanto  $f$  não é contínua em qualquer  $x \in \mathbb{R}$ . ■

**Exercício 3** Suponha que a reta procurada é tangente ao gráfico de  $y = x^2$  no ponto de abscissa  $x_0$ . Assim, esta reta possui coeficiente angular

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{d}{dx} (x^2) \right|_{x=x_0} \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

e passa pelo ponto  $(x_0, x_0^2)$ , ou seja, sua equação é dada por

$$\begin{aligned} y - x_0^2 &= 2x_0(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow \\ y &= 2x_0x - x_0^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Por outro lado, suponha esta mesma reta seja tangente ao gráfico de  $y = 2 + (x - 3)^2$  no ponto de abscissa  $x_1$ . Seguindo o mesmo procedimento feito anteriormente, segue-se que o coeficiente angular desta reta é

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{d}{dx} (2 + (x - 3)^2) \right|_{x=x_1} \\ &= 2(x_1 - 3) \end{aligned}$$

e passa pelo ponto  $(x_1, 2 + (x_1 - 3)^2)$ . Portanto, sua equação também é dada por

$$\begin{aligned} y - [2 + (x_1 - 3)^2] &= 2(x_1 - 3)(x - x_1) \\ &\Leftrightarrow \\ y &= 2(x_1 - 3)x + (11 - x_1^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Como as equações obtidas em (1) e (2) representam a mesma reta, segue-se que

$$\begin{cases} 2x_0 = 2(x_1 - 3) \\ -x_0^2 = 11 - x_1^2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se

$$x_0 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{10}{3}$$

E a reta procurado, possui equação

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$$

■

**Exercício 4** A equação genérica da reta que passa pelo ponto  $(3, 4)$  é dada por

$$y - 4 = m(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = m(x - 3) + 4$$

sendo  $m$  o seu coeficiente angular. A interseção desta reta com o eixo  $x$  é obtida fazendo  $y = 0$ , ou seja

$$0 = m(x - 3) + 4 \Rightarrow$$

$$x_b = 3 - \frac{4}{m}$$

e, de modo análogo, a interseção com o eixo  $y$  é obtida fazendo  $x = 0$  na equação desta reta. Ou seja

$$y = m(0 - 3) + 4 \Rightarrow$$

$$y_h = -3m + 4$$

Assim, a área do triângulo em questão é dada por

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{x_b \cdot y_h}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left( 3 - \frac{4}{m} \right) (-3m + 4) \\ &= \frac{1}{2} \left( -9m + 24 - \frac{16}{m} \right) \\ &= 12 - \frac{8}{m} - \frac{9}{2}m \end{aligned}$$

Para determinar o valor de  $m$  para o qual tem-se área mínima é necessário resolver a seguinte equação

$$A'(m) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{8}{m^2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{8}{m^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$16 = 9m^2 \Rightarrow$$

$$m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$m = \pm \frac{4}{3}$$

Observe que, para  $m = \frac{4}{3}$  tem-se

$$\begin{aligned} x_b &= 3 - 4 \frac{3}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo, uma vez que resultaria em um triângulo de área nula. Segue-se portanto, que

$$m = -\frac{4}{3}$$

e a reta procurada é dada por

$$y = -\frac{4}{3}(x - 3) + 4$$

■

**Exercício 5** O ponteiro das horas dá uma volta completa no relógio em 24 horas. Chamando de  $h(t)$  o ângulo que o ponteiro das horas forma com a horizontal e medido no sentido anti-horário no instante  $t$ , segue-se que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60} \text{ rad/min}$$

Da mesma forma, considere  $m(t)$  o ângulo que o ponteiro dos minutos forma com a horizontal, no instante  $t$ , segue-se que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/min}$$

Considerando o triângulo formado pelo centro do relógio e as extremidades dos ponteiros,  $x$  a distância entre os extremos dos ponteiros e  $\theta$  o ângulo entre os ponteiros, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm \left| \frac{dh}{dt} - \frac{dm}{dt} \right| \\ &= \pm \left| \frac{2\pi}{24 \cdot 60} - \frac{2\pi}{60} \right| \\ &= \pm \frac{23\pi}{12 \cdot 60} \end{aligned}$$

e da lei dos cossenos tem-se

$$x^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 80 - 64 \cos \theta$$

Derivando-se em ambos os lados desta igualdade em

relação ao tempo, obtém-se

$$2x \frac{dx}{dt} = 64 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x}{32 \sin \theta} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{23\pi \sqrt{80 - 64 \cos \theta}}{12 \cdot 60 \cdot 32 \sin \theta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{23\pi \sqrt{5 - 4 \cos \theta}}{180 \cdot 32 \sin \theta}$$

■