Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Fundamentos de Cálculo

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final **2012**
Data: Segunda-feira, 9 de Julho **Turma M3**

Exercício 1 *Em ambos os itens deste problema, dado que os limites apresentam uma indeterminação do tipo 0/0, fica claro então o uso das regras de l'Hopital. Desta forma, segue-se que:*

a).

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3e^{3x}}{1}=3$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

■

Exercício 2 *Considere* (x_0, y_0) *um ponto sobre o gráfico da função*

$$f(x)=1-x^2$$

ou seja

$$y_0=1-x_0^2$$

Uma reta tangente ao gráfico de f*, passando pelo ponto* (x_0, y_0) *possui equação dada por*

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

Ou seja,

$$y=-2x_0x+x_0^2+1$$

Para que uma reta destas passe pelo ponto $(2, 0)$*, devemos ter que*

$$0=-2x_0\cdot 2+x_0^2+1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x_0^2-4x_0+1=0$$

donde, resolvendo esta equação do 2^o grau, obtemos

$$x_0=2+\sqrt{3}\Rightarrow y_0=-2(3+2\sqrt{3})$$
$$ou$$
$$x_0=2-\sqrt{3}\Rightarrow y_0=-2(3-2\sqrt{3})$$

De modo que, os pontos procurados são

$$\left(2+\sqrt{3},-2(3+2\sqrt{3})\right)\ e\ \left(2-\sqrt{3},-2(3-2\sqrt{3})\right)$$

■

Exercício 3 *Seja* (x_0, y_0) *um ponto sobre o gráfico da curva*

$$y^3=2x^2$$

ou seja,

$$y_0^3=2x_0^2$$

Uma reta tangente ao gráfico desta curva, passando por (x_0, y_0) *é dada por*

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

onde

$$m=\frac{dy}{dx}(x_0,y_0)$$

é o coeficiente angular desta reta. Para encontrarmos m*, deveremos usar derivação implícita sobre a equação da curva, tomando* $y = y(x)$*. Assim, teremos*

$$3y^2\frac{dy}{dx}=4x\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4x}{3y^2}$$

Desejamos encontrar as retas tangentes ao gráfico da curva que ao mesmo tempo sejam perpendiculares à reta de equação

$$x+2y-2=0$$

Observe que o coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_r=-\frac{1}{2}$$

Assim, deveremos ter

$$m\cdot m_r=-1\Rightarrow m=2$$

Portanto, segue-se que

$$\frac{4x_0}{3y_0^2}=2\Leftrightarrow 4x_0=6y_0^2$$

Logo, os pontos (x_0, y_0) *que procuramos satisfazem ao sistema*

$$\begin{cases} y_0^3=2x_0^2\\ \\ 4x_0=6y_0^2\end{cases}$$

Donde, resolvendo, obtemos

$$(0,0)\ e\ \left(\frac{2}{27},\frac{2}{9}\right)$$

Como m não existe quando $y = 0$, a única solução possivel é

$$\left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

■

Exercício 4 *Seja (x_0, y_0) um ponto sobre a elipse de equação*

$$4x^2 + y^2 = 4$$

A distância de um tal ponto ao ponto $(1, 0)$ é dada por

$$d(x_0, y_0) = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}$$

Como

$$4x_0^2 + y_0^2 = 4$$

segue-se que

$$\begin{aligned} d(x_0) &= \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 4 - 4x_0^2} \\ &= \sqrt{-3x_0^2 - 2x_0 + 5} \end{aligned}$$

Considere a função auxiliar

$$g(x_0) = -3x_0^2 - 2x_0 + 5$$

Observe que, para encontrarmos os pontos sobre a elipse mais próximo do ponto $(1, 0)$, devemos minimizar a função d. *Além disto, perceba também que minimizando a função* g, *estaremos também minimizando a função* d, *ou seja, para encontrarmos os pontos que queremos basta encontrarmos os extremos de* g. *Para isto devemos resolver a seguinte equação:*

$$\begin{aligned} g'(x_0) = 0 &\Leftrightarrow \\ -6x_0 - 2 = 0 &\Leftrightarrow \\ x_0 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} y_0^2 &= 4 - 4x_0^2 \Leftrightarrow \\ y_0^2 &= \frac{32}{9} \Leftrightarrow \\ y_0 &= \pm\frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Logo, os nossos candidatos a extremos são os pontos

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

Observe porém, que

$$g''(x) = -6$$

ou seja

$$g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O que, nos permite afirmar, pelo teste da derivada segunda, que os pontos encontrados são ambos, pontos de máximo da função g *e, por conseguinte, máximos da função* d. *Portanto, os pontos procurados são*

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

■

Exercício 5

a). Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x \cos^5 x\,dx &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x \cos^5 x\,dx \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x \cos^4 x \cos x\,dx \\ &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x\,dx \end{aligned}$$

Tome

$$y = \operatorname{sen} x$$

e perceba que

$$dy = \cos x\,dx$$

e que

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = \pi &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^8 x \cos^5 x\,dx = \int_0^0 y^8(1 - y^2)^2 dy = 0$$

□

b). Tome

$$u = \sqrt{x}$$

e observe que

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Leftrightarrow 2u\,du = dx$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{\sqrt{3 + u}}{u} 2u\,du \\ &= 2\int \sqrt{3 + u} du \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{(3 + u)^3} + k \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{(3 + \sqrt{x})^3} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■