Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Fundamentos de Cálculo

Prof°. Edson

1° Semestre

Gabarito 2ª Prova **2012**
Data: Terça-feira, 3 de Julho **Turma M3**

Exercício 1 *Como f possui concavidade voltada para cima em I, é válido que a inclinação das retas tangentes ao gráfico f aumentam à medida que a variável x cresce ao percorrer o intervalo I, podemos aafirmar que f' é uma função crescente em I. Além disto, dado um $x_0 \in I$, decorre da definição que*

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (1)$$

Sejam $a, b \in I$, sem perda de genarilade consideraremos $a < b$, como f é derivável em I e portanto, contínua em I, temos do ***Teorema do Valor Médio*** *que, existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Observe, que da desigualdade (1) podemos deduzir que

$$f(x_0) < f(x) + f'(x_0)(x_0 - x), \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (2)$$

Se considerarmos $x_0 \in (a, c)$ teremos do fato de f' ser crescente em I, que

$$f'(x_0) < f'(c)$$

Logo, é válido que

$$f(x_0) < f(x) + f'(c)(x_0 - x) \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (3)$$

Assim, se considerarmos

$$x = a$$

e observarmos que existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$x_0 = ta + (1 - t)b$$

Voltando em (3) teremos

$$f(ta + (1 - t)b) < f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + (1 - t)b - a)$$

$$= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + b - tb - a)$$

$$= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b(1 - t) - a(1 - t))$$

$$= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(1 - t)(b - a)$$

$$= f(a) + [f(b) - f(a)](1 - t)$$

$$= tf(a) + (1 - t)f(b)$$

ou seja,

$$f(ta + (1 - t)b) < tf(a) + (1 - t)f(b)$$

para $ta + (1 - t)b \in (a, c)$.
Suponha agora $x_0 \in (c, b)$, temos que

$$f'(c) < f'(x_0)$$

e, considerando

$$x = b$$

Podemos deduzir, a partir de (2) que

$$f(ta + (1 - t)b) < f(b) - f'(x_0)(b - x_0)$$

$$= f(b) - f'(c)(b - ta - (1 - t)b)$$

$$= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - ta - b + tb)$$

$$= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)t$$

$$= f(b) - [f(b) - f(a)]t$$

$$= tf(a) + (1 - t)f(b)$$

ou seja,

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

para $ta + (1-t)b \in (c, b)$.
Resta-nos provar a desigualdade acima, para $x_0 = c$. *Neste caso observe que*

$$f'(x_0) = f'(c)$$

e

$$f(a) + f'(c)(c-a) - f(c) =$$

$$= -(f(c) - f(a)) + f'(c)(c-a)$$

$$= -f'(c_2)(c-a) + f'(c)(c-a),\ c_2 \in (a, c)$$

$$= [f'(c) - f'(c_2)]\,(c-a)$$

como $c_2 < c$, *segue-se que*

$$f'(c_2) < f'(c) \Rightarrow f'(c) - f'(c_2) > 0$$

ou seja,

$$f(a) + f'(c)(c-a) - f(c) > 0 \Rightarrow f(c) < f(a) + f'(c)(c-a)$$

Considerando

$$c = ta + (1-t)b,\ t \in (0, 1)$$

segue-se que

$$f(ta + (1-t)b) < f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b-a)$$

$$= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+b-tb-a)$$

$$= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(-t(b-a)+b-a)$$

$$= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-t)(b-a)$$

$$= f(a) + [f(b)-f(a)]\,(1-t)$$

$$= tf(a) + (1-t)f(b)$$

e, isto conclui a nossa demonstração. ■

Exercício 2 *Chamemos de x o comprimento do lado da base da caixa e y a altura da caixa. Desta forma o volume desta caixa será dado por*

$$V(x, y) = x^2 y$$

Para a construção das 04 faces laterais a um custo de R\$0,20 por cm^2 *e a base ao custo de R\$0,30 por cm*^{2}, *o custo total será de*

$$C(x, y) = 4xy \cdot 0,20 + x^2 \cdot 0,30$$

$$= \frac{8xy + 3x^2}{10}$$

Como queremos que o custo seja de R\$100,00, temos então que

$$\frac{8xy + 3x^2}{10} = 100 \Longleftrightarrow 8xy + 3x^2 = 1000 \qquad (4)$$

Assim, se substituirmos esta expressão na expressão que temos para o volume da caixa, teremos uma nova fórmula para o cálculo do volume dada por

$$V(x) = \frac{1000x - 3x^3}{8}$$

Com isto, para encontrarmos os candidatos à extremos desta função, devemos resolver a seguinte equação

$$V'(x) = 0$$

ou seja,

$$\frac{1000 - 9x^2}{8} = 0$$

Donde segue-se que, os candidatos a extremos são

$$x = \pm\frac{10}{3}\sqrt{10}$$

como x é uma das dimensões da caixa, devemos ter então $x > 0$, portanto nosso único candidato a extemo é o valor

$$x = \frac{10}{3}\sqrt{10}$$

Observe agora, que

$$V''(x) = -\frac{18}{8}x$$

e que

$$V''\left(\frac{10}{3}\sqrt{10}\right) = -\frac{18}{8}\frac{10}{3}\sqrt{10} = -\frac{15}{2}\sqrt{10} < 0$$

E, pelo teste da derivada segunda, podemos concluir que $x = \frac{10}{3}\sqrt{10}$ *é um ponto de máximo para função* V. *Usando a equação (4), teremos*

$$y = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

Portanto as dimensões da caixa que procuramos´são

$$x = \frac{10\sqrt{10}}{3} \; e \; y = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

■

Exercício 3

a).

$$\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{x^3 - x} = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{\dfrac{-2}{3x^3}}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}}}{\dfrac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2}{3x}}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3x\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}}$$

$$= 0$$

□

b).

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{12x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{12}$$

$$= \frac{1}{12}$$

■

Exercício 4

a). Observe que a função

$$f(x) = \cos^2 x$$

é contínua em $\mathbb{R}$, portanto, existe uma função p tal que

$$p'(x) = f(x) = \cos^2 x$$

para todo $x \in D_f$. Assim, temos que

$$\int_0^{x^2} \cos^2 t\, dt = p(t)|_0^{x^2}$$

$$= p(x^2) - p(0)$$

e com isto, segue-se que

$$F(x) = p(x^2) - p(0)$$

donde, derivando, obtemos

$$F'(x) = p'(x^2)\cdot 2x - 0$$

$$= 2x\cos^2(x^2)$$

□

b). De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que a função

$$g(x) = \frac{1}{3 + \operatorname{sen} x}$$

é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que podemos afirmar que existe uma função q tal que

$$q'(x) = g(x) = \frac{1}{3 + \operatorname{sen} x}$$

para todo $x \in D_g$. Assim, segue-se que

$$\int_{-x^2}^{1} \frac{1}{3 + \operatorname{sen} t} dt = q(1) - q(-x^2)$$

ou seja,

$$G(x) = q(1) - q(-x^2)$$

donde, derivando, obtemos

$$G'(x) = 0 - q'(-x^2)(-2x)$$

$$= \frac{2x}{3 + \operatorname{sen}(-x^2)}$$

■

Exercício 5

a). Tome

$$u = x - 1$$

e observe que

$$x = u + 1$$

$$dx = du$$

E, disto segue-se que

$$\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}dx = \int \frac{(u+1)^3+2}{u^2}du$$

$$= \int \frac{u^3+3u^2+3u+3}{u^2}du$$

$$= \int \left(u+3+\frac{3}{u}+\frac{3}{u^2}\right)du$$

$$= \frac{1}{2}u^2+3u+3\ln|u|-\frac{3}{u}+k$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^2+3(x-1)+ + 3\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). Usando integração por partes, considere

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{-x}dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = -2\text{sen}\, 2x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\text{sen}\, 2x dx$$

Usando novamente integração por partes para a resolução da integral que aparece no segundo membro da equação anterior, tome

$$\begin{cases} z = \text{sen}\, 2x \\ dw = e^{-x}dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = 2\cos 2x dx \\ w = -e^{-x} \end{cases}$$

Portanto, temos que

$$\int \text{sen}\, 2x\, e^{-x}dx = -e^{-x}\text{sen}\, 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\, dx$$

Logo, voltando à integral original, teremos

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = -e^{-x}\cos 2x - 2\int e^{-x}\text{sen}\, 2x dx$$

$$= -e^{-x}\cos 2x - - 2\left(-e^{-x}\text{sen}\, 2x + 2\int e^{-x}\cos 2x\, dx\right)$$

$$= e^{-x}\left(2\text{sen}\, 2x - \cos 2x\right) - - 4\int e^{-x}\cos 2x\, dx$$

e, disto, segue-se que

$$\int e^{-x}\cos 2x\, dx = \frac{1}{5}e^{-x}\left(2\text{sen}\, 2x - \cos 2x\right) + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■