**Universidade Federal do Vale do São Francisco**
**Engenharia Civil**
**Fundamentos de Cálculo**

**Prof°. Edson**

**1° Semestre**

**Gabarito 1ª Prova** **2012**
**Data: Sexta-feira, 25 de Maio** **Turma 11**

---

**Exercício 1** ***(2.0 pontos)*** *Suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

*Então, dado qualquer intervalo* $I = (-\epsilon, \epsilon)$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$x_n \in I, \forall n \geq n_0$$

*Ou seja,*

$$-\epsilon < x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

*Disto segue-se que*

$$|x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

*Observe agora que* $|x_n| \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *e* $-\epsilon < 0$, *ou seja*

$$-\epsilon < 0 \leq |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

*Assim, concluimos que*

$$-\epsilon < |x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

*e, isto é equivalente a dizer que*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

*Reciprocamente, suponha que*

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$$

*da definição, temos que dado um intervalo* $I = (-\epsilon, \epsilon)$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|x_n| \in I, \forall n \geq n_0$$

*Ou seja,*

$$-\epsilon < |x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

*Observe que*

$$|x_n| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n < \epsilon$$

*e*

$$-\epsilon < |x_n| \Rightarrow x_n > -\epsilon \,e\, x_n < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n < \epsilon$$

*Assim, temos que*

$$-\epsilon < x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

*e, isto é equivalente a dizer que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$\blacksquare$

**Exercício 2**

*a).* ***(0.5 pontos)*** *Perceba que o limite em questão não apresenta problemas quando* $x = 0$. *Desta forma temos que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x-2)^3 + 2|x|}{x^4 + x^2 + \sqrt{2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} (x-2)^3 + 2|x|}{\lim\limits_{x\to 0} x^4 + x^2 + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{-8}{\sqrt{2}}$$

$$= -4\sqrt{2}$$

$\square$

*b).* ***(0.5 pontos)*** *Antes de efetuarmos o cálculo do limite, observe que*

$$\frac{x^k - a^k}{x - a} = \underbrace{x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-2}x + a^{k-1}}_{k\,termos}$$

*Com isto, temos que*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^k - a^k}{x - a} = \lim_{x\to a} (x^{k-1} + ax^{k-2} + \cdots + a^{k-1})$$

$$= ka^{k-1}$$

$\blacksquare$

**Exercício 3**

*a).* ***(0.7 pontos)*** *Desejamos encontrar valores de* $\alpha$ *e* $\beta$ *tais que*

$$\lim_{x\to 6} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 6} = 8$$

*Para isto, observe inicialmente que, quando* $x = 6$ *deveremos ter*

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0$$

*pois, em caso contrário teríamos*

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-\alpha x+\beta}{x-6}=\pm\infty$$

*Assim segue-se que as constantes $\alpha$ e $\beta$ devem obedecer a relação*

$$36-6\alpha+\beta=0\Leftrightarrow\beta=6\alpha-36$$

*Voltando ao limite em questão e levando em consideração a relação obtida anteriormente, teremos*

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-\alpha x+6\alpha-36}{x-6}=8\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36-\alpha(x-6)}{x-6}=8\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+6)-\alpha(x-6)}{x-6}=8\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{(x-6)(x+6-\alpha)}{x-6}=8\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to 6}x+6-\alpha=8\Leftrightarrow$$

$$12-\alpha=8$$

*Portanto, temos que*

$$\alpha=12-8=4$$

$$\beta=24-36=-12$$

□

b). ***(0.8 pontos)****De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, desejamos encontrar as constantes $\alpha$ e $\beta$ de tal forma que*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\alpha x-\frac{\beta x+3}{x+1}\right]=5$$

*Isto é equivalente a*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\alpha x(x+1)-\beta x-3}{x+1}\right]=5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\alpha x^2+(\alpha-\beta)x-3}{x+1}\right]=5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\alpha x+(\alpha-\beta)-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=5$$

*Observe nesta última igualdade que, sendo $\alpha\neq 0$, teríamos*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\alpha x+(\alpha-\beta)-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=+\infty$$

*De forma que, para termos a equação sendo verdadeira, devemos impor que*

$$\alpha=0$$

*e disto, segue-se que*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\alpha x+(\alpha-\beta)-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=5\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-\beta-\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]=5\Leftrightarrow$$

$$-\beta=5$$

*ou seja*

$$\alpha=0$$
$$\beta=-5$$

■

**Exercício 4** ***(1.0 ponto)*** *Supondo que*

$$|f(x)-f(1)|\leq(x-1)^2$$

*segue-se que*

$$-(x-1)^2\leq f(x)-f(1)\leq(x-1)^2$$

*Passando o limite com $x\to 1$, teremos*

$$\lim_{x\to 1}-(x-1)^2\leq\lim_{x\to 1}[f(x)-f(1)]\leq\lim_{x\to 1}(x-1)^2$$

*ou seja,*

$$0\leq\lim_{x\to 1}[f(x)-f(1)]\leq 0$$

*e, pelo* ***Teorema do Confronto****, segue-se que*

$$\lim_{x\to 1}[f(x)-f(1)]=0\Leftrightarrow\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

*o que mostra que a função $f$ é contínua em $x_0=1$.*

■

**Exercício 5** ***(1.0 ponto)*** *Sendo*

$$g(t) = f(t^2 + 1)$$

*e, usando a* ***regra da cadeia****, teremos que*

$$g'(t) = f'(t^2 + 1) \cdot 2t$$

*Logo*

$$g'(1) = 2f'(2)$$

*Como é dado que*

$$f'(2) = 5$$

*segue-se portanto, que*

$$g'(1) = 10$$

■

**Exercício 6** ***(2.0 pontos)*** *Seja $V$ o volume contido no cone no momento em que sua altura no reservatório seja $h$ e o raio seja $r$. Ou seja*

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

*Como o reservatório possui a forma de um cone de altura 15m e raio 10m, por semelhança de triângulos temos que*

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{15}$$

*ou seja*

$$r = \frac{2}{3}h$$

*Logo, o volume contido no reservatório é dado por*

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}h\right)^2 h$$

$$= \frac{4}{27}\pi h^3$$

*Como $V$ e $h$ estão variando com o tempo, temos que*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

*e, sabendo que*

$$\frac{dV}{dt} = 0.1 m^3/s$$

*teremos, quando $h = 5m$, que*

$$0.1 = \frac{4}{9}\pi(5)^2\frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{9}{1000\pi} m/s$$

■

**Exercício 7** ***(1.5 pontos)*** *Sendo*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

*teremos*

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

*Portanto a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de abcissa $p$, passa pelo ponto*

$$(p, f(p)) = \left(p, \frac{1}{p}\right)$$

*e possui coeficiente angular*

$$f'(p) = -\frac{1}{p^2}$$

*Ou seja, sua equação é dada por*

$$y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - p)$$

*e, fazendo sua interseção com o eixo $x$ (a reta $y = 0$), teremos*

$$0 - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - p) \Leftrightarrow$$

$$x - p = p \Leftrightarrow$$

$$x = 2p$$

*o que demonstra o que queríamos.* ■