

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Fundamentos de Matemática

Profº. Edson

1ª Prova

1º Semestre

2012

Data: 12 de Maio

Duração: 09:00 - 13:00

Problema 1 Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.

Problema 2 Calcule os limites

a). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 2|x|}{x^4 + x^2 + \sqrt{2}};$

b). $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a}, a \in \mathbb{R}.$

Problema 3 Determine os valores de α e β para que

a). $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 6} = 8;$

b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\alpha x - \frac{\beta x + 3}{x + 1} \right] = 5;$

Problema 4 Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua no ponto $x_0 = 1$.

Problema 5 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável e seja $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo que $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.

Problema 6 Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$. O vértice está a 15m do topo e o raio do topo é de 10m. Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que $h = 5\text{m}$?

Problema 7 Seja r a reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto de abscissa p . Verifique que r intercepta o eixo x no ponto de abscissa $2p$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Fundamentos de Cálculo

Prof. Edson

1º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Sexta-feira, 25 de Maio

2012
Turma 11

Exercício 1 (2.0 pontos) Suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Então, dado qualquer intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n \in I, \forall n \geq n_0$$

Ou seja,

$$-\epsilon < x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

Disto segue-se que

$$|x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

Observe agora que $|x_n| \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e $-\epsilon < 0$, ou seja

$$-\epsilon < 0 \leq |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

Assim, concluímos que

$$-\epsilon < |x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

e, isto é equivalente a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$$

Reciprocamente, suponha que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$$

da definição, temos que dado um intervalo $I = (-\epsilon, \epsilon)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n| \in I, \forall n \geq n_0$$

Ou seja,

$$-\epsilon < |x_n| < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

Observe que

$$|x_n| < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n < \epsilon$$

e

$$-\epsilon < |x_n| \Rightarrow x_n > -\epsilon \text{ e } x_n < \epsilon \Rightarrow -\epsilon < x_n < \epsilon$$

Assim, temos que

$$-\epsilon < x_n < \epsilon, \forall n \geq n_0$$

e, isto é equivalente a dizer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

Exercício 2

a). **(0.5 pontos)** Perceba que o limite em questão não apresenta problemas quando $x = 0$. Desta forma temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)^3 + 2|x|}{x^4 + x^2 + \sqrt{2}} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (x-2)^3 + 2|x|}{\lim_{x \rightarrow 0} x^4 + x^2 + \sqrt{2}} \\ &= \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ &= -4\sqrt{2} \end{aligned}$$

□

b). **(0.5 pontos)** Antes de efetuarmos o cálculo do limite, observe que

$$\frac{x^k - a^k}{x - a} = \underbrace{x^{k-1} + ax^{k-2} + \dots + a^{k-2}x + a^{k-1}}_{k \text{ termos}}$$

Com isto, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^k - a^k}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} (x^{k-1} + ax^{k-2} + \dots + a^{k-1}) \\ &= ka^{k-1} \end{aligned}$$

■

Exercício 3

a). **(0.7 pontos)** Desejamos encontrar valores de α e β tais que

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 6} = 8$$

Para isto, observe inicialmente que, quando $x = 6$ deveremos ter

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0$$

■

pois, em caso contrário teríamos

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x - 6} = \pm \infty$$

Assim segue-se que as constantes α e β devem obedecer a relação

$$36 - 6\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 6\alpha - 36$$

Voltando ao limite em questão e levando em consideração a relação obtida anteriormente, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - \alpha x + 6\alpha - 36}{x - 6} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 36 - \alpha(x - 6)}{x - 6} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x - 6)(x + 6) - \alpha(x - 6)}{x - 6} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{(x - 6)(x + 6 - \alpha)}{x - 6} = 8 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 6} x + 6 - \alpha = 8 \Leftrightarrow$$

$$12 - \alpha = 8$$

Portanto, temos que

$$\alpha = 12 - 8 = 4$$

$$\beta = 24 - 36 = -12$$

□

- b). **(0.8 pontos)** De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, desejamos encontrar as constantes α e β de tal forma que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\alpha x - \frac{\beta x + 3}{x + 1} \right] = 5$$

Isto é equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x(x + 1) - \beta x - 3}{x + 1} \right] = 5 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x^2 + (\alpha - \beta)x - 3}{x + 1} \right] = 5 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x + (\alpha - \beta) - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = 5$$

Observe nesta última igualdade que, sendo $\alpha \neq 0$, teríamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x + (\alpha - \beta) - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = +\infty$$

De forma que, para termos a equação sendo verdadeira, devemos impor que

$$\alpha = 0$$

e disto, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\alpha x + (\alpha - \beta) - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = 5 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\beta - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = 5 \Leftrightarrow$$

$$-\beta = 5$$

ou seja

$$\alpha = 0$$

$$\beta = -5$$

■

Exercício 4 (1.0 ponto) Supondo que

$$|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$$

segue-se que

$$-(x - 1)^2 \leq f(x) - f(1) \leq (x - 1)^2$$

Passando o limite com $x \rightarrow 1$, teremos

$$\lim_{x \rightarrow 1} -(x - 1)^2 \leq \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - f(1)] \leq \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2$$

ou seja,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - f(1)] \leq 0$$

e, pelo **Teorema do Confronto**, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) - f(1)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

o que mostra que a função f é contínua em $x_0 = 1$.

■

Exercício 5 (1.0 ponto) Sendo

$$g(t) = f(t^2 + 1)$$

e, usando a **regra da cadeia**, teremos que

$$g'(t) = f'(t^2 + 1) \cdot 2t$$

Logo

$$g'(1) = 2f'(2)$$

Como é dado que

$$f'(2) = 5$$

segue-se portanto, que

$$g'(1) = 10$$

■

Exercício 6 (2.0 pontos) Seja V o volume contido no cone no momento em que sua altura no reservatório seja h e o raio seja r . Ou seja

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Como o reservatório possui a forma de um cone de altura 15m e raio 10m, por semelhança de triângulos temos que

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{15}$$

ou seja

$$r = \frac{2}{3}h$$

Logo, o volume contido no reservatório é dado por

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{3}h\right)^2 h \\ &= \frac{4}{27}\pi h^3 \end{aligned}$$

Como V e h estão variando com o tempo, temos que

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{9}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

e, sabendo que

$$\frac{dV}{dt} = 0.1m^3/s$$

teremos, quando $h = 5m$, que

$$0.1 = \frac{4}{9}\pi(5)^2 \frac{dh}{dt} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{9}{1000\pi}m/s$$

■

Exercício 7 (1.5 pontos) Sendo

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

teremos

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Portanto a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa p , passa pelo ponto

$$(p, f(p)) = \left(p, \frac{1}{p}\right)$$

e possui coeficiente angular

$$f'(p) = -\frac{1}{p^2}$$

Ou seja, sua equação é dada por

$$y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - p)$$

e, fazendo sua interseção com o eixo x (a reta $y = 0$), teremos

$$0 - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - p) \Leftrightarrow$$

$$x - p = p \Leftrightarrow$$

$$x = 2p$$

o que demonstra o que queríamos. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Fundamentos de Matemática

Prof^o. Edson

2^a Prova

1^o Semestre

2012

Data: 30 de Junho

Duração: 13:00 - 16:00

Problema 1 *Seja f uma função derivável no intervalo aberto I . Suponha que f tenha concavidade para cima em I . Mostre que para quaisquer $a, b \in I$, vale que*

$$f(ta + (1 - t)b) < tf(a) + (1 - t)f(b),$$

para todo $t \in (0, 1)$. Interprete geometricamente.

Problema 2 *O material para a base de uma caixa retangular com tampa aberta e base quadrada custa R\$ 0,30 por cm^2 , enquanto que o material para as faces custa R\$ 0,20 por cm^2 . Encontre as dimensões para a caixa de maior volume que pode ser feita com R\$ 100,00.*

Problema 3 *Calcule os limites*

a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x^3 - x}$

b). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2}$

Problema 4 *Calcule a derivada das seguintes funções*

a). $F(x) = \int_0^{x^2} \cos^2 t \, dt$

b). $G(x) = \int_{-x^2}^1 \frac{1}{3 + \sin t} dt$

Problema 5 *Calcule as integrais indefinidas*

a). $\int \frac{x^3 + 2}{(x - 1)^2} dx$

b). $\int e^{-x} \cos 2x dx$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova

Data: Terça-feira, 3 de Julho

2012

Turma M3

Exercício 1 Como f possui concavidade voltada para cima em I , é válido que a inclinação das retas tangentes ao gráfico f aumentam à medida que a variável x cresce ao percorrer o intervalo I , podemos afirmar que f' é uma função crescente em I . Além disto, dado um $x_0 \in I$, decorre da definição que

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (1)$$

Sejam $a, b \in I$, sem perda de generalidade consideraremos $a < b$, como f é derivável em I e portanto, contínua em I , temos do **Teorema do Valor Médio** que, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Observe, que da desigualdade (1) podemos deduzir que

$$f(x_0) < f(x) + f'(x_0)(x_0 - x), \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (2)$$

Se considerarmos $x_0 \in (a, c)$ teremos do fato de f' ser crescente em I , que

$$f'(x_0) < f'(c)$$

Logo, é válido que

$$f(x_0) < f(x) + f'(c)(x_0 - x) \forall x \in I, x \neq x_0 \quad (3)$$

Assim, se considerarmos

$$x = a$$

e observarmos que existe $t \in (0, 1)$ tal que

$$x_0 = ta + (1 - t)b$$

Voltando em (3) teremos

$$\begin{aligned} f(ta + (1 - t)b) &< f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + (1 - t)b - a) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(ta + b - tb - a) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b(1 - t) - a(1 - t)) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(1 - t)(b - a) \\ &= f(a) + [f(b) - f(a)](1 - t) \\ &= tf(a) + (1 - t)f(b) \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(ta + (1 - t)b) < tf(a) + (1 - t)f(b)$$

para $ta + (1 - t)b \in (a, c)$.

Suponha agora $x_0 \in (c, b)$, temos que

$$f'(c) < f'(x_0)$$

e, considerando

$$x = b$$

Podemos deduzir, a partir de (2) que

$$\begin{aligned} f(ta + (1 - t)b) &< f(b) - f'(x_0)(b - x_0) \\ &= f(b) - f'(c)(b - ta - (1 - t)b) \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - ta - b + tb) \\ &= f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a)t \\ &= f(b) - [f(b) - f(a)]t \\ &= tf(a) + (1 - t)f(b) \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(ta + (1-t)b) < tf(a) + (1-t)f(b)$$

para $ta + (1-t)b \in (c, b)$.

Resta-nos provar a desigualdade acima, para $x_0 = c$.
Neste caso observe que

$$f'(x_0) = f'(c)$$

e

$$\begin{aligned} f(a) + f'(c)(c-a) - f(c) &= \\ &= -(f(c) - f(a)) + f'(c)(c-a) \\ &= -f'(c_2)(c-a) + f'(c)(c-a), \quad c_2 \in (a, c) \\ &= [f'(c) - f'(c_2)](c-a) \end{aligned}$$

como $c_2 < c$, segue-se que

$$f'(c_2) < f'(c) \Rightarrow f'(c) - f'(c_2) > 0$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f(a) + f'(c)(c-a) - f(c) &> 0 \Rightarrow \\ f(c) &< f(a) + f'(c)(c-a) \end{aligned}$$

Considerando

$$c = ta + (1-t)b, \quad t \in (0, 1)$$

segue-se que

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &< f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b-a) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+b-tb-a) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(-t(b-a)+b-a) \\ &= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(1-t)(b-a) \\ &= f(a) + [f(b)-f(a)](1-t) \\ &= tf(a) + (1-t)f(b) \end{aligned}$$

e, isto conclui a nossa demonstração. ■

Exercício 2 Chamemos de x o comprimento do lado da base da caixa e y a altura da caixa. Desta forma o volume desta caixa será dado por

$$V(x, y) = x^2 y$$

Para a construção das 04 faces laterais a um custo de R\$0,20 por cm^2 e a base ao custo de R\$0,30 por cm^2 , o custo total será de

$$C(x, y) = 4xy \cdot 0,20 + x^2 \cdot 0,30$$

$$= \frac{8xy + 3x^2}{10}$$

Como queremos que o custo seja de R\$100,00, temos então que

$$\frac{8xy + 3x^2}{10} = 100 \iff 8xy + 3x^2 = 1000 \quad (4)$$

Assim, se substituirmos esta expressão na expressão que temos para o volume da caixa, teremos uma nova fórmula para o cálculo do volume dada por

$$V(x) = \frac{1000x - 3x^3}{8}$$

Com isto, para encontrarmos os candidatos à extremos desta função, devemos resolver a seguinte equação

$$V'(x) = 0$$

ou seja,

$$\frac{1000 - 9x^2}{8} = 0$$

Donde segue-se que, os candidatos a extremos são

$$x = \pm \frac{10}{3} \sqrt{10}$$

como x é uma das dimensões da caixa, devemos ter então $x > 0$, portanto nosso único candidato a extremo é o valor

$$x = \frac{10}{3} \sqrt{10}$$

Observe agora, que

$$V''(x) = -\frac{18}{8}x$$

e que

$$V''\left(\frac{10}{3} \sqrt{10}\right) = -\frac{18}{8} \frac{10}{3} \sqrt{10} = -\frac{15}{2} \sqrt{10} < 0$$

E, pelo teste da derivada segunda, podemos concluir que $x = \frac{10}{3} \sqrt{10}$ é um ponto de máximo para função V . Usando a equação (4), teremos

$$y = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

Portanto as dimensões da caixa que procuramos são

$$x = \frac{10\sqrt{10}}{3} \text{ e } y = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

■

Exercício 3

a).

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt[3]{x^3 - x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-2}{3x^3}}{\frac{-1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{3x \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

b).

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{6x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{12x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{12} \\
&= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

■

Exercício 4

a). Observe que a função

$$f(x) = \cos^2 x$$

é contínua em $\mathbb{R}$, portanto, existe uma função p tal que

$$p'(x) = f(x) = \cos^2 x$$

para todo $x \in D_f$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{x^2} \cos^2 t \, dt &= p(t)|_0^{x^2} \\
&= p(x^2) - p(0)
\end{aligned}$$

e com isto, segue-se que

$$F(x) = p(x^2) - p(0)$$

donde, derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
F'(x) &= p'(x^2) \cdot 2x - 0 \\
&= 2x \cos^2(x^2)
\end{aligned}$$

□

b). De modo semelhante ao que foi feito no item anterior, observe que a função

$$g(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$$

é contínua para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que podemos afirmar que existe uma função q tal que

$$q'(x) = g(x) = \frac{1}{3 + \sin x}$$

para todo $x \in D_g$. Assim, segue-se que

$$\int_{-x^2}^1 \frac{1}{3 + \sin t} \, dt = q(1) - q(-x^2)$$

ou seja,

$$G(x) = q(1) - q(-x^2)$$

donde, derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 0 - q'(-x^2)(-2x) \\
&= \frac{2x}{3 + \sin(-x^2)}
\end{aligned}$$

■

Exercício 5

a). Tome

$$u = x - 1$$

e observe que

$$x = u + 1$$

$$dx = du$$

E, disto segue-se que

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + 2}{(x-1)^2} dx &= \int \frac{(u+1)^3 + 2}{u^2} du \\
 &= \int \frac{u^3 + 3u^2 + 3u + 3}{u^2} du \\
 &= \int \left(u + 3 + \frac{3}{u} + \frac{3}{u^2} \right) du \\
 &= \frac{1}{2}u^2 + 3u + 3 \ln |u| - \frac{3}{u} + k \\
 &= \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + \\
 &\quad + 3 \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + k
 \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. □

b). Usando integração por partes, considere

$$\begin{cases} u = \cos 2x \\ dv = e^{-x} dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} du = -2\sin 2x dx \\ v = -e^{-x} \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx$$

Usando novamente integração por partes para a resolução da integral que aparece no segundo membro da equação anterior, tome

$$\begin{cases} z = \sin 2x \\ dw = e^{-x} dx \end{cases}$$

e observe que

$$\begin{cases} dz = 2\cos 2x dx \\ w = -e^{-x} \end{cases}$$

Portanto, temos que

$$\int \sin 2x e^{-x} dx = -e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx$$

Logo, voltando à integral original, teremos

$$\begin{aligned}
 \int e^{-x} \cos 2x dx &= -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x dx \\
 &= -e^{-x} \cos 2x - \\
 &\quad - 2 \left(-e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x dx \right) \\
 &= e^{-x} (2\sin 2x - \cos 2x) - \\
 &\quad - 4 \int e^{-x} \cos 2x dx
 \end{aligned}$$

e, disto, segue-se que

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{1}{5} e^{-x} (2\sin 2x - \cos 2x) + k$$

onde $k \in \mathbb{R}$. ■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Colegiado de Engenharia Civil
Fundamentos do Cálculo

Profº. Edson

Prova Final

1º Semestre

2012

Data: 07 de Julho

Duração: 13:00 - 16:00

Problema 1 *Calcule os limites*

a). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x};$

b). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$

Problema 2 *Encontre as coordenadas de todos os pontos do gráfico de $f(x) = 1 - x^2$ nos quais a reta tangente passa pelo ponto $(2, 0)$.*

Problema 3 *Determine os pontos sobre a curva $y^3 = 2x^2$ cujas tangentes à mesma, são perpendiculares à reta*

$$x + 2y - 2 = 0$$

Problema 4 *Encontre os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.*

Problema 5 *Calcule as integrais*

a). $\int_0^\pi \sin^8 x \cos^5 x \, dx;$

b). $\int \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 9 de Julho

2012
Turma M3

Exercício 1 Em ambos os itens deste problema, dado que os limites apresentam uma indeterminação do tipo $0/0$, fica claro então o uso das regras de l'Hopital. Desta forma, segue-se que:

a).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{1} = 3$$

□

b).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

■

Exercício 2 Considere (x_0, y_0) um ponto sobre o gráfico da função

$$f(x) = 1 - x^2$$

ou seja

$$y_0 = 1 - x_0^2$$

Uma reta tangente ao gráfico de f , passando pelo ponto (x_0, y_0) possui equação dada por

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Ou seja,

$$y = -2x_0x + x_0^2 + 1$$

Para que uma reta destas passe pelo ponto $(2, 0)$, devemos ter que

$$\begin{aligned} 0 &= -2x_0 \cdot 2 + x_0^2 + 1 \\ &\Leftrightarrow \\ x_0^2 - 4x_0 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

donde, resolvendo esta equação do 2º grau, obtemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 + \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = -2(3 + 2\sqrt{3}) \\ &\text{ou} \\ x_0 &= 2 - \sqrt{3} \Rightarrow y_0 = -2(3 - 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

De modo que, os pontos procurados são

$$\left(2 + \sqrt{3}, -2(3 + 2\sqrt{3})\right) \text{ e } \left(2 - \sqrt{3}, -2(3 - 2\sqrt{3})\right)$$

■

Exercício 3 Seja (x_0, y_0) um ponto sobre o gráfico da curva

$$y^3 = 2x^2$$

ou seja,

$$y_0^3 = 2x_0^2$$

Uma reta tangente ao gráfico desta curva, passando por (x_0, y_0) é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

onde

$$m = \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)$$

é o coeficiente angular desta reta. Para encontrarmos m , deveremos usar derivação implícita sobre a equação da curva, tomando $y = y(x)$. Assim, teremos

$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 4x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{3y^2}$$

Desejamos encontrar as retas tangentes ao gráfico da curva que ao mesmo tempo sejam perpendiculares à reta de equação

$$x + 2y - 2 = 0$$

Observe que o coeficiente angular desta reta é dado por

$$m_r = -\frac{1}{2}$$

Assim, deveremos ter

$$m \cdot m_r = -1 \Rightarrow m = 2$$

Portanto, segue-se que

$$\frac{4x_0}{3y_0^2} = 2 \Leftrightarrow 4x_0 = 6y_0^2$$

Logo, os pontos (x_0, y_0) que procuramos satisfazem ao sistema

$$\begin{cases} y_0^3 = 2x_0^2 \\ 4x_0 = 6y_0^2 \end{cases}$$

Donde, resolvendo, obtemos

$$(0, 0) \text{ e } \left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

Como m não existe quando $y = 0$, a única solução possível é

$$\left(\frac{2}{27}, \frac{2}{9}\right)$$

■

Exercício 4 Seja (x_0, y_0) um ponto sobre a elipse de equação

$$4x^2 + y^2 = 4$$

A distância de um tal ponto ao ponto $(1, 0)$ é dada por

$$d(x_0, y_0) = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2}$$

Como

$$4x_0^2 + y_0^2 = 4$$

segue-se que

$$\begin{aligned} d(x_0) &= \sqrt{(x_0 - 1)^2 + 4 - 4x_0^2} \\ &= \sqrt{-3x_0^2 - 2x_0 + 5} \end{aligned}$$

Considere a função auxiliar

$$g(x_0) = -3x_0^2 - 2x_0 + 5$$

Observe que, para encontrarmos os pontos sobre a elipse mais próximo do ponto $(1, 0)$, devemos minimizar a função d . Além disto, perceba também que minimizando a função g , estaremos também minimizando a função d , ou seja, para encontrarmos os pontos que queremos basta encontrarmos os extremos de g . Para isto devemos resolver a seguinte equação:

$$\begin{aligned} g'(x_0) &= 0 \Leftrightarrow \\ -6x_0 - 2 &= 0 \Leftrightarrow \\ x_0 &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned} y_0^2 &= 4 - 4x_0^2 \Leftrightarrow \\ y_0^2 &= \frac{32}{9} \Leftrightarrow \\ y_0 &= \pm \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

Logo, os nossos candidatos a extremos são os pontos

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

Observe porém, que

$$g''(x) = -6$$

ou seja

$$g''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O que, nos permite afirmar, pelo teste da derivada segunda, que os pontos encontrados são ambos, pontos de máximo da função g e, por conseguinte, máximos da função d . Portanto, os pontos procurados são

$$\left(-\frac{1}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}, -\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

■

Exercício 5

a). Observe que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^8 x \cos^5 x \, dx &= \int_0^\pi \sin^8 x \cos^4 x \cos x \, dx \\ &= \int_0^\pi \sin^8 x \cos^4 x \sin x \, dx \\ &= \int_0^\pi \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx \end{aligned}$$

Tome

$$y = \sin x$$

e perceba que

$$dy = \cos x \, dx$$

e que

$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow y = 0 \\ x = \pi &\Rightarrow y = 0 \end{aligned}$$

Portanto

$$\int_0^\pi \sin^8 x \cos^5 x \, dx = \int_0^0 y^8 (1 - y^2)^2 \, dy = 0$$

□

b). Tome

$$u = \sqrt{x}$$

e observe que

$$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Leftrightarrow 2u \, du = dx$$

Assim, segue-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{3 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, dx &= \int \frac{\sqrt{3 + u}}{u} 2u \, du \\ &= 2 \int \sqrt{3 + u} \, du \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{(3 + u)^3} + k \\ &= \frac{4}{3} \sqrt{(3 + \sqrt{x})^3} + k \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{R}$.

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
PROFMAT
Fundamentos de Cálculo

Prof^o. Edson

1^a Prova

1^o Semestre

2018

Data: 01 de Junho

Duração: 14:00 - 17:00

Problema 1 *Seja f uma função que satisfaz*

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Mostre que, se f é contínua em $x = 0$, então f é contínua em qualquer $x \in \mathbb{R}$. Além disso, se $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$, então $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Problema 2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$f(x + 1)f(f(x) + 1) + 1 = 0$$

para todo x real. Prove que f não é contínua.

Problema 3 *Encontre as tangentes comuns às parábolas $y = x^2$ e $y = 2 + (x - 3)^2$.*

Problema 4 *Determine a equação da reta que passa pelo ponto $(3, 4)$ e que forma com os eixos cartesianos um triângulo no primeiro quadrante de área mínima.*

Problema 5 *O ponteiro dos minutos de um relógio mede 8mm e o ponteiro das horas mede 4mm. Com que taxa varia a distância entre as extremidades dos ponteiros desse relógio?*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Domingo, 15 de Julho

2018
Turma FC

Exercício 1 Sabendo que a função f é contínua em $x = 0$, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Para verificar-se a continuidade de f em $x_0 \in \mathbb{R}$ é necessário calcular o seguinte limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Considere, portanto a seguinte mudança de variável

$$u = x - x_0$$

e observe que

$$x = u + x_0$$

e

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

Assim, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u + x_0)$$

Como

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{u \rightarrow 0} f(u)f(x_0) \\ &= f(x_0) \lim_{u \rightarrow 0} f(u) \\ &= f(x_0)f(0) \\ &= f(x_0 + 0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

Ou seja, a função f é contínua em $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 2 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x+1)f(f(x)+1)+1=0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ou seja,

$$f(x+1)f(f(x)+1)=-1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Para $x = 0$, tem-se que

$$f(1)f(f(1)+1)=-1$$

Suponha que f é contínua em $\mathbb{R}$, segue-se que existe um x_0 entre 1 e $f(1)+1$ tal que $f(x_0) = 0$. Tomando $x = x_0 - 1$ e substituindo na relação dada, tem-se

$$f(x_0)f(f(x_0)-1)+1=-1$$

O que gera uma contradição. Portanto f não é contínua em qualquer $x \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 Suponha que a reta procurada é tangente ao gráfico de $y = x^2$ no ponto de abscissa x_0 . Assim, esta reta possui coeficiente angular

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{d}{dx} (x^2) \right|_{x=x_0} \\ &= 2x_0 \end{aligned}$$

e passa pelo ponto (x_0, x_0^2) , ou seja, sua equação é dada por

$$\begin{aligned} y - x_0^2 &= 2x_0(x - x_0) \\ &\Leftrightarrow \\ y &= 2x_0x - x_0^2 \end{aligned} \tag{1}$$

Por outro lado, suponha esta mesma reta seja tangente ao gráfico de $y = 2 + (x - 3)^2$ no ponto de abscissa x_1 . Seguindo o mesmo procedimento feito anteriormente, segue-se que o coeficiente angular desta reta é

$$\begin{aligned} m &= \left. \frac{d}{dx} (2 + (x - 3)^2) \right|_{x=x_1} \\ &= 2(x_1 - 3) \end{aligned}$$

e passa pelo ponto $(x_1, 2 + (x_1 - 3)^2)$. Portanto, sua equação também é dada por

$$\begin{aligned} y - [2 + (x_1 - 3)^2] &= 2(x_1 - 3)(x - x_1) \\ &\Leftrightarrow \\ y &= 2(x_1 - 3)x + (11 - x_1^2) \end{aligned} \tag{2}$$

Como as equações obtidas em (1) e (2) representam a mesma reta, segue-se que

$$\begin{cases} 2x_0 = 2(x_1 - 3) \\ -x_0^2 = 11 - x_1^2 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, obtém-se

$$x_0 = \frac{1}{3}$$

$$x_1 = \frac{10}{3}$$

E a reta procurado, possui equação

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9}$$

■

Exercício 4 A equação genérica da reta que passa pelo ponto $(3, 4)$ é dada por

$$y - 4 = m(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$y = m(x - 3) + 4$$

sendo m o seu coeficiente angular. A interseção desta reta com o eixo x é obtida fazendo $y = 0$, ou seja

$$0 = m(x - 3) + 4 \Rightarrow$$

$$x_b = 3 - \frac{4}{m}$$

e, de modo análogo, a interseção com o eixo y é obtida fazendo $x = 0$ na equação desta reta. Ou seja

$$y = m(0 - 3) + 4 \Rightarrow$$

$$y_h = -3m + 4$$

Assim, a área do triângulo em questão é dada por

$$\begin{aligned} A(m) &= \frac{x_b \cdot y_h}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(3 - \frac{4}{m} \right) (-3m + 4) \\ &= \frac{1}{2} \left(-9m + 24 - \frac{16}{m} \right) \\ &= 12 - \frac{8}{m} - \frac{9}{2}m \end{aligned}$$

Para determinar o valor de m para o qual tem-se área mínima é necessário resolver a seguinte equação

$$A'(m) = 0$$

Ou seja,

$$\frac{8}{m^2} - \frac{9}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{8}{m^2} = \frac{9}{2} \Rightarrow$$

$$16 = 9m^2 \Rightarrow$$

$$m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow$$

$$m = \pm \frac{4}{3}$$

Observe que, para $m = \frac{4}{3}$ tem-se

$$\begin{aligned} x_b &= 3 - 4 \frac{3}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

o que é absurdo, uma vez que resultaria em um triângulo de área nula. Segue-se portanto, que

$$m = -\frac{4}{3}$$

e a reta procurada é dada por

$$y = -\frac{4}{3}(x - 3) + 4$$

■

Exercício 5 O ponteiro das horas dá uma volta completa no relógio em 24 horas. Chamando de $h(t)$ o ângulo que o ponteiro das horas forma com a horizontal e medido no sentido anti-horário no instante t , segue-se que

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60} \text{ rad/min}$$

Da mesma forma, considere $m(t)$ o ângulo que o ponteiro dos minutos forma com a horizontal, no instante t , segue-se que

$$\frac{dm}{dt} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/min}$$

Considerando o triângulo formado pelo centro do relógio e as extremidades dos ponteiros, x a distância entre os extremos dos ponteiros e θ o ângulo entre os ponteiros, segue-se que

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \pm \left| \frac{dh}{dt} - \frac{dm}{dt} \right| \\ &= \pm \left| \frac{2\pi}{24 \cdot 60} - \frac{2\pi}{60} \right| \\ &= \pm \frac{23\pi}{12 \cdot 60} \end{aligned}$$

e da lei dos cossenos tem-se

$$x^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos \theta \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 80 - 64 \cos \theta$$

Derivando-se em ambos os lados desta igualdade em

relação ao tempo, obtém-se

$$2x \frac{dx}{dt} = 64 \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x}{32 \sin \theta} \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{23\pi \sqrt{80 - 64 \cos \theta}}{12 \cdot 60 \cdot 32 \sin \theta} \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{23\pi \sqrt{5 - 4 \cos \theta}}{180 \cdot 32 \sin \theta}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
PROFMAT
Fundamentos de Cálculo

Prof.º Edson

2ª Prova

1º Semestre

2018

Data: 20 de Julho

Duração: 14:00 - 17:00

Problema 1 *Calcule*

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2}$$

e usando este resultado, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + i^2} \right) = \ln \sqrt{2}$$

Problema 2 *Seja f uma função com derivadas contínuas até a ordem N num intervalo $[a, b]$ e seja*

$$I_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt, \quad 0 \leq n \leq N$$

Mostre que

$$I_n(x) = -\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + I_{n-1}(x), \quad 1 \leq n \leq N$$

Problema 3 *Mostre que*

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^r}$$

converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$.

Problema 4 *Determine o intervalo de convergência de cada uma das séries abaixo:*

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} (\sqrt{3})^{2n} (x+2)^n$

b). $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3^n}{n^3}\right) x^n$

Problema 5 *Encontre a área da região entre o eixo x e a curva $y = e^{-3x}$ para $x \geq 0$.*

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito 2^a Prova
Data: Sexta-feira, 20 de Julho

2018
Turma FC

Exercício 1 Para calcular a integral

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2}$$

Considere a seguinte mudança de variável

$$u = 1 + x^2$$

e observe que

$$du = 2xdx$$

e

$$x = 0 \Rightarrow u = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow u = 2$$

Ou seja

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{du}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 \\ &= \ln \sqrt{2} \end{aligned} \quad (1)$$

Como a função

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

é integrável, segue-se que o resultado obtido deve ser o mesmo para qualquer partição do intervalo $[0, 1]$. Escolhendo a partição

$$P : 1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$$

onde

$$x_i = \frac{i}{n}, i = 0, \dots, n$$

Segue-se da definição de integral de Riemann que

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$$

sendo

$$\Delta x = \max \Delta x_i, i = 1, \dots, n$$

Observe que

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\ &= \frac{i}{n} - \frac{i-1}{n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\Delta x = \frac{1}{n}$$

e

$$\Delta x \rightarrow 0 \Rightarrow n \rightarrow +\infty$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) \end{aligned}$$

Para qualquer $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Tomando

$$c_i = x_i = \frac{i}{n}$$

tem-se

$$\begin{aligned} f(c_i) &= f\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \frac{\frac{i}{n}}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{i}{n}}{\frac{n^2 + i^2}{n^2}} \\ &= \frac{i}{n} \frac{n^2}{n^2 + i^2} \\ &= \frac{in}{n^2 + i^2} \end{aligned}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{1+x^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(c_i) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{in}{n^2 + i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + i^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Portanto, de (1) e (2), segue-se que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2 + i^2} = \ln \sqrt{2}$$

■

Exercício 2 Considere

$$I_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt, \quad 0 \leq n \leq N$$

sendo f uma função com derivadas contínuas até a ordem N num intervalo $[a, b]$. Usando integração por partes para calcular a integral dada, tome

$$\begin{cases} u = \frac{(x-t)^n}{n!} \\ dv = f^{(n+1)}(t) dt \end{cases}$$

Segue-se que

$$\begin{cases} du = \frac{-n(x-t)^{n-1}}{n!} dt \\ \quad = -\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ v = f^{(n)}(t) \end{cases}$$

para $1 \leq n \leq N$. Logo

$$\begin{aligned} I_n(x) &= uv \Big|_a^x - \int_a^x v du \\ &= \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!} \Big|_a^x + \int_a^x f^{(n)}(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt \\ &= -\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)}{(n-1)!} dt \\ &= -\frac{(x-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + I_{n-1}(x) \end{aligned}$$

■

Exercício 3 Sabe-se que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^r} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^r}$$

Considere

$$v = \ln x$$

e observe que

$$dv = \frac{dx}{x}$$

Além disso,

$$x = 2 \Rightarrow v = \ln 2$$

$$x = b \Rightarrow v = \ln b$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_2^b \frac{dx}{x (\ln x)^r} &= \int_{\ln 2}^{\ln b} \frac{dv}{v^r} \\ &= \frac{v^{-r+1}}{-r+1} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \\ &= \frac{v^{1-r}}{1-r} \Big|_{\ln 2}^{\ln b} \\ &= \frac{(\ln b)^{1-r}}{1-r} - \frac{(\ln 2)^{1-r}}{1-r} \\ &= \frac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r} \end{aligned}$$

para $r \neq 1$. Disto segue-se que

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^r} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(\ln b)^{1-r} - (\ln 2)^{1-r}}{1-r} \right]$$

Porém,

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b)^{1-r} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } 1-r > 0 \\ 0, & \text{se } 1-r < 0 \end{cases}$$

Para $r = 1$, a integral dada torna-se

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} [\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)] \\ &= +\infty - 2 \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Ou seja

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^r} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } r \leq 1 \\ -(\ln 2)^{1-r} & \text{se } r > 1 \end{cases}$$

Em outras palavras, a integral dada converge se $r > 1$ e diverge se $r \leq 1$. ■

Exercício 4

a). O termo geral da série em questão é dado por

$$\begin{aligned} a_n &= (\sqrt{3})^{2n} (x+2)^n \\ &= 3^n (x+2)^n \end{aligned}$$

Assim,

$$a_{n+1} = 3^{n+1} (x+2)^{n+1}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{3^{n+1} (x+2)^{n+1}}{3^n (x+2)^n} \right| \\ &= |3(x+2)| \\ &= 3|x+2| \end{aligned}$$

Usando o teste da razão, esta série será convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} 3|x+2| &< 1 && \Leftrightarrow \\ |x+2| &< \frac{1}{3} && \Leftrightarrow \\ -\frac{1}{3} &< x+2 < \frac{1}{3} && \Leftrightarrow \\ -\frac{7}{3} &< x < -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Logo, a série dada é convergente para $x \in \left(-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. □

b). O termo geral desta série é dado por

$$a_n = \frac{3^n}{n^3} x^n$$

Assim,

$$a_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} x^{n+1}$$

e

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^3} x^{n+1}}{\frac{3^n}{n^3} x^n} \right| \\ &= \left| \frac{3n^3}{(n+1)^3} x \right| \\ &= 3 \left| \frac{n^3}{(n+1)^3} \right| |x| \end{aligned}$$

Usando o teste da razão, esta série será convergente quando

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \left| \frac{n^3}{(n+1)^3} \right| |x| &< 1 && \Leftrightarrow \\ 3|x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{n^3}{(n+1)^3} \right| &< 1 && \Leftrightarrow \\ 3|x| &< 1 && \Leftrightarrow \\ |x| &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Logo, a série dada é convergente para $x \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. ■

Exercício 5 A área da região em questão é dada por

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-3x} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-3x}}{3} \right]_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{e^{-3b}}{3} + \frac{1}{3} \right] \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
PROFMAT
Fundamentos de Cálculo

Prof.º. Edson

Prova Final

1º Semestre

2018

Data: 27 de Julho

Duração: 14:00 - 17:00

Problema 1 Sendo $r > 0$, calcule

a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r}$

b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^{-x}$

Problema 2 Prove que, se $f(x)$ é contínua em $x = a$ com $f(x) \geq 0$, então $g(x) = \sqrt{f(x)}$ também é contínua em $x = a$.

Problema 3 Considere

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3 \sin^2\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Mostre que

$$f'(0) = 0$$

Problema 4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e periódica, de período $p > 0$. Prove que

$$\int_a^{a+p} f(t) dt = \int_0^p f(t) dt$$

para todo $a \in \mathbb{R}$.

Problema 5 Mostre que

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\log t}{1+t^2} dt = 0$$

para todo $x > 0$.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Prof^o. Edson

1^o Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Segunda-feira, 30 de Julho

2018
Turma FC

Exercício 1

a). Deseja-se calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r}, r > 0$$

Antes disto, observe que

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow \ln x \rightarrow +\infty \text{ e } x^r \rightarrow +\infty \text{ (pois } r > 0)$$

Ou seja, para esta situação a **Regra de L'Hospital** pode ser aplicada. Procedendo desta forma, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{r x^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x r x^{r-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{r x^r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

b). Para o cálculo do limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x}$$

Observe que

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow e^x \rightarrow +\infty \text{ e } x^r \rightarrow +\infty \text{ (pois } r > 0)$$

Ou seja, a **Regra de L'Hospital** pode ser

aplicada e disto segue-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^r e^{-x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^r}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r x^{r-1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(r-1)x^{r-2}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(r-1)(r-2)x^{r-3}}{e^x} \\ &= \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r!}{e^x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Exercício 2 Considere a função

$$h(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$$

Dado um $\epsilon > 0$, tome $\delta = |\sqrt{a}| \epsilon$ e suponha que

$$|x - a| < \delta$$

observe que

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= \left| \sqrt{x} - \sqrt{a} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \\ &= \left| \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \right| \\ &= \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \end{aligned}$$

Porém,

$$|\sqrt{x} + \sqrt{a}| \geq |\sqrt{a}| \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\sqrt{a}|} \geq \frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \leq \frac{1}{|\sqrt{a}|}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{a}| &= \frac{|x - a|}{|\sqrt{x} + \sqrt{a}|} \\ &\leq \frac{|x - a|}{|\sqrt{a}|} \\ &< \frac{\delta}{|\sqrt{a}|} \\ &= \frac{|\sqrt{a}| \epsilon}{|\sqrt{a}|} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

Ou seja, a função h é contínua em $x = a$ para qualquer $a \geq 0$.

Percebe agora que

$$g(x) = h(f(x))$$

e como $f(x)$ é contínua para $x = a$ e $h(x)$ é contínua para qualquer $a \geq 0$, segue-se da **continuidade da composição de funções contínuas** que g também é contínua em $x = a$, uma vez que $f(x) \geq 0$. ■

Exercício 3 Usando a definição de derivada, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$f(x) = \begin{cases} |x|^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Segue-se que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$$

Assim, se $h \rightarrow 0^+$ tem-se

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} h^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

uma vez que

$$h^2 \rightarrow 0 \text{ e } \left| \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right) \right| \leq 1$$

Do mesmo modo, quando $h \rightarrow 0^-$ tem-se

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h^3 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -h^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} h^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{h}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(0) = 0$$

■

Exercício 4 Considere a função

$$\alpha(x) = \int_x^{x+p} f(t) dt$$

Como f é contínua em $\mathbb{R}$ é portanto integrável em $\mathbb{R}$ e assim, seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$F'(t) = f(t)$$

Segue-se disto que

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_x^{x+p} f(t) dt \\ &= F(t) \Big|_x^{x+p} \\ &= F(x+p) - F(x) \end{aligned}$$

Usando a **regra da cadeia**, tem-se que

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= F'(x+p) \frac{d}{dx} (x+p) - F'(x) \\ &= F'(x+p) - F'(x) \\ &= f(x+p) - f(x) \end{aligned}$$

Como f é periódica de período p , ou seja

$$f(x+p) = f(x),$$

Segue-se que

$$\alpha'(x) = 0$$

Ou seja, a função α é constante. Assim,

$$\alpha(x) = \alpha(0) = k, k \in \mathbb{R}$$

Escrito de outra forma,

$$\int_x^{x+p} f(t)dt = \int_0^p f(t)dt$$

■

Exercício 5 Considere

$$\alpha(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\log t}{1+t^2} dt$$

e seja F uma função tal que

$$F'(t) = \frac{\log t}{1+t^2}$$

A existência de tal função é garantida dada a **continuidade** das funções $\log t$ e $1+t^2$, para todo $t > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\log t}{1+t^2} dt \\ &= F(t) \Big|_{\frac{1}{x}}^x \\ &= F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Usando a **regra da cadeia**, tem-se

$$\begin{aligned} \alpha'(x) &= F'(x) - F'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x}\right) \\ &= F'(x) + F'\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\log \frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} + \frac{\log x^{-1}}{1+\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} - \frac{\log x}{\frac{x^2+1}{x^2} x^2} \\ &= \frac{\log x}{1+x^2} - \frac{\log x}{1+x^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\alpha(x) = k, k \in \mathbb{R}, x > 0$$

Observe que

$$\alpha(1) = \int_1^1 \frac{\log t}{1+t^2} dt = 0$$

Portanto,

$$\alpha(x) = 0, x > 0$$

Escrevendo de outro modo,

$$\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\log t}{1+t^2} dt = 0, x > 0$$

■

Universidade Federal do Vale do São Francisco
PROFMAT
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

1ª Prova

1º Semestre

2025

Data: 30 de Maio

Duração: 09:00 - 12:00



Problema 1 *Seja $f : [0, 1] \rightarrow [0, 5]$ uma função contínua. Prove que existe $\alpha \in [0, 1]$ tal que*

$$f(\alpha) = 5\alpha$$

Problema 2 *Calcule*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin \left(x^2 + \frac{1}{x} \right) - \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

Problema 3 *Calcule*

a). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$

b). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1}}{x + 1}$

c). $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$

Problema 4 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que*

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Suponha que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

a). *Mostre que $L = 0$*

b). *Mostre $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$*

Problema 5 *Considere $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Mostre que*

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n$$

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

2º Semestre

Gabarito 1ª Prova
Data: Terça-feira, 10 de Junho

2018
Turma FC

Exercício 1 Considere a função

$$g(x) = f(x) - 5x$$

Se

$$f(0) = 0 \text{ ou } f(1) = 5$$

considere $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, e está demonstrado o que se pede. Caso contrário, suponha

$$f(0) > 0$$

$$f(1) < 5$$

Desta forma, segue-se que

$$g(0) = f(0) > 0$$

$$g(1) = f(1) - 5 < 0$$

Como g é contínua em $[0, 1]$, segue-se do teorema do valor intermediário que, existe $\alpha \in (0, 1)$ tal que

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) - 5\alpha = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 5\alpha$$

Exercício 2 Observe que

$$\begin{aligned} \sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) &= \sin(x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cos(x^2) - \\ &\quad - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= \sin(x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \\ &\quad + \sin\left(\frac{1}{x}\right) [\cos(x^2) - 1] \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\sin\left(x^2 + \frac{1}{x}\right) - \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \sin(x^2) \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\frac{1}{x}\right) [\cos(x^2) - 1] \right\} \end{aligned}$$

Sabendo que

$$\left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

$$\left| \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq 1$$

e que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x^2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\cos(x^2) - 1] = 0$$

Então,

$$A = 0$$

■

Exercício 3

a).

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 \left(\frac{10}{x^2} + \frac{1}{x} \sqrt{x} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x^2} x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \end{aligned}$$

Observe que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{10}{x^2} + \sqrt{\frac{1}{x}} \right) = 0^+$$

Logo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}} = +\infty$$

□

b).

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} \right)}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}}{1 + \frac{1}{x}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

c).

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x \left(1 + \frac{1}{x} \sqrt{x + \sqrt{x}} \right)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x^2} (x + \sqrt{x})}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sqrt{x}}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Exercício 4 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

e suponha que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$$

a). Inicialmente observe que

$$\begin{aligned}
f(2x) &= f(x+x) \\
&= f(x) + f(x) \\
&= 2f(x)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2f(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Considere

$$u = 2x$$

e perceba que

$$x \rightarrow 0 \Rightarrow u \rightarrow 0$$

Ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = L$$

Portanto, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(2x) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 2 \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow$$

$$L = 2L \Rightarrow$$

$$L = 0$$

■

b). Observe que

$$x = (x - x_0) + x_0$$

Logo

$$f(x) = f(x - x_0) + f(x_0)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x - x_0) + f(x_0)]$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

Considere

$$v = x - x_0$$

e perceba que

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow v \rightarrow 0$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0) = \lim_{v \rightarrow 0} f(v) = L$$

Além disso,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) = f(x_0)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x - x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \\ &= L + f(x_0) \\ &= f(x_0) \end{aligned}$$

e observe que

$$\begin{aligned} f'(x) &= n x^{n-1} & \Rightarrow f'(1) &= n \\ & & &= \frac{n!}{(n-1)!} \\ f''(x) &= n(n-1)x^{n-2} & \Rightarrow f''(1) &= n(n-1) \\ & & &= \frac{n!}{(n-2)!} \\ f'''(x) &= n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \Rightarrow f'''(1) &= n(n-1)(n-2) \\ & & &= \frac{n!}{(n-3)!} \\ \dots & & \dots & \dots \\ f^{(n)}(x) &= n(n-1) \dots 2 \cdot 1 x^0 & \Rightarrow f^{(n)}(1) &= n! \\ & & &= \frac{n!}{(n-n)!} \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} S &= f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} \\ &= \frac{n!}{1!(n-1)!} + \frac{n!}{2!(n-2)!} + \dots + \frac{n!}{n!0!} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \\ &= 2^n \end{aligned}$$

Exercício 5 Considere

$$f(x) = x^n$$

Universidade Federal do Vale do São Francisco
PROFMAT
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

2ª Prova

1º Semestre

2025

Data: 11 de Julho

Duração: 09:00 - 12:00

◆

Problema 1 Suponha que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n$ para $n > 1$. Prove que f é constante considerando f' .

Problema 2 Suponha que f seja uma função tal que $f'(x) = \frac{1}{x}$ para todo $x > 0$ e $f(1) = 0$. Prove que

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

para todos $x, y > 0$.

Dica: encontre $g'(x)$ supondo que $g(x) = f(xy)$.

Problema 3 Calcule os seguintes limites:

i). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$

ii). $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$

Problema 4 Calcule $f'(0)$, dado que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

e que $g(0) = g'(0) = 0$ e $g''(0) = 17$.

Problema 5 No trinômio

$$x^3 + px + q$$

escolha os coeficientes p e q de modo que este tenha um mínimo em $x = 3$ e este mínimo seja igual a 5.

Boa Sorte!

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Mestrado Profissional em Matemática
Fundamentos de Cálculo

Profº. Edson

1º Semestre

Gabarito 2ª Prova
Data: Segunda-feira, 14 de Julho

2025
Turma FC

Exercício 1 Suponha que

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^n,$$

para $n > 1$. Segue-se disto, que

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| \leq \frac{|x+h-x|^n}{|h|} = |h|^{n-1}$$

Ou seja,

$$-|h|^{n-1} \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \leq |h|^{n-1}$$

Logo, fazendo $h \rightarrow 0$ e, usando o **teorema do Confronto**, tem-se que

$$0 \leq f'(x) \leq 0$$

Ou seja, $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ e portanto, f é constante. ■

Exercício 2 Considere

$$g(x) = f(xy)$$

e usando a **regra da cadeia**, segue-se que

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(xy) (xy)' \\ &= \frac{1}{xy} y \\ &= \frac{1}{x} \\ &= f'(x) \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_1^x g'(x) dx = \int_1^x f'(x) dx \Rightarrow$$

$$g(x) \Big|_1^x = f(x) \Big|_1^x \Rightarrow$$

$$g(x) - g(1) = f(x) - f(1) \Rightarrow$$

$$f(xy) - f(y) = f(x) - f(1)$$

Sabendo que $f(1) = 0$, tem-se portanto, que

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Exercício 3

a). Usando a **regra de L'Hôpital**, tem-se que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x}{\cos x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

b). Novamente, usando a **regra de L'Hôpital**,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x \cos x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\cos^2 x + \sin^2 x \right) \\ &= -1 \end{aligned}$$

■

Exercício 4 De acordo com a definição, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^2} \end{aligned}$$

Observe que $g(h)$ e h^2 são ambas nulas quando $h = 0$ e da **regra de L'Hôpital**, segue-se que

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(h)}{2h}$$

Novamente, tem-se que $g'(h)$ e $2h$ são ambas nulas quando $h = 0$ e da **regra de L'Hôpital**, tem-se

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g''(h)}{2} = \frac{17}{2}$$

■

■

Exercício 5 Considere

$$f(x) = x^3 + px + q$$

Para que f tenha um **mínimo** em $x = 3$ é necessário que

$$f'(3) = 0$$

Ou seja

$$27 + p = 0 \Rightarrow p = -27$$

e para que o mínimo tenha valor 5, é necessário que

$$f(3) = 5$$

Ou seja

$$27 - 81 + q = 5 \Rightarrow q = 59$$

