

Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof^o. Edson

2^o Semestre

Gabarito Prova Final
Data: Sexta-feira, 19 de Dezembro

2025
Turma E4

Exercício 1 Reescrevendo a equação diferencial

$$(x+1)(y' + y^2) = -y,$$

tem-se

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x+1}y = -y^2$$

que é uma **equação de Bernoulli** e pode ainda ser vista como

$$-\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{x+1} \frac{1}{y} = 1$$

Considere

$$u = y^{-1}$$

e observe que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -y^{-2} \frac{dy}{dx} \\ &= -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \end{aligned}$$

e, substituindo na **edo** dada, tem-se

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x+1}u = 1$$

Ou seja, a **edo** resultante é **linear**, com

$$P(x) = -\frac{1}{x+1}$$

$$f(x) = 1$$

e

$$\begin{aligned} \int P(x)dx &= \int -\frac{dx}{x+1} \\ &= -\ln|x+1| + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. O **fator integrante** desta equação será então

$$\begin{aligned} \mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \\ &= e^{-\ln|x+1| + c_0} \\ &= \pm e^{c_0} (x+1)^{-1} \\ &= \frac{c_1}{x+1} \end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)f(x)dx \\ &= (x+1) \int \frac{dx}{x+1} \\ &= (x+1)(\ln|x+1| + c) \end{aligned}$$

com $c \in \mathbb{R}$. Trazendo a variável y de volta, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} &= u && \Leftrightarrow \\ \frac{1}{y} &= (x+1)(\ln|x+1| + c) \end{aligned}$$

Ou seja,

$$y(x) = \frac{1}{(x+1)(\ln|x+1| + c)}$$

■

Exercício 2 Observe que a equação

$$(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' + 3y = 0$$

pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,

$$y'' - \frac{3}{x+1}y' + \frac{3}{(x+1)^2}y = 0$$

onde

$$P(x) = -\frac{3}{x+1}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = x+1$$

é uma solução. Usando o método da **redução de ordem**, considere

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int -P(x)dx \\ &= \int \frac{3}{x+1}dx \\ &= 3 \ln|x+1| + c_0 \end{aligned}$$

com $c_0 \in \mathbb{R}$. Disto segue-se que

$$\begin{aligned}\mu(x) &= e^{\mu(x)} \\ &= e^{3\ln|x+1|+c_0} \\ &= \pm e^{c_0} (x+1)^3 \\ &= c_1 (x+1)^3\end{aligned}$$

onde $c_1 = \pm e^{c_0}$. Tomando $c_1 = 1$, tem-se,

$$\begin{aligned}u(x) &= \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx \\ &= \int \frac{(x+1)^3}{(x+1)^2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tomando $c_2 = 0$, segue-se que,

$$\begin{aligned}y_2(x) &= y_1(x)u(x) \\ &= (x+1) \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \\ &= \frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} + x\end{aligned}$$

■

Exercício 3 Observe inicialmente que a equação homogênea associada é dada por

$$y'' - 2y' + y = 0$$

cujas equações auxiliares são dadas por

$$m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow (m-1)^2 = 0,$$

ou seja

$$m_1 = m_2 = 1$$

e, nesse caso, o conjunto fundamental de soluções é

$$y_1 = e^x$$

$$y_2 = x e^x$$

e a solução complementar é

$$\begin{aligned}y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^x + c_2 x e^x \\ &= (c_1 + c_2 x) e^x\end{aligned}$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Usando o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular, segue-se que

$$\begin{aligned}W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & (1+x) e^x \end{vmatrix} \\ &= e^{2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, \quad f(x) = e^x \sqrt{x} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ e^x \sqrt{x} & \dots \end{vmatrix} \\ &= -x \sqrt{x} e^{2x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ \dots & e^x \sqrt{x} \end{vmatrix} \\ &= \sqrt{x} e^{2x}\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}u_1' &= \frac{W_1}{W} \\ &= \frac{-x \sqrt{x} e^{2x}}{e^{2x}} \\ &= -x \sqrt{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2' &= \frac{W_2}{W} \\ &= \frac{\sqrt{x} e^{2x}}{e^{2x}} \\ &= \sqrt{x}\end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned} u_1 &= \int u_1' dx \\ &= -\int x\sqrt{x} dx \\ &= -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + c_3 \\ \\ u_2 &= \int u_2' dx \\ &= \int \sqrt{x} dx \\ &= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c_4 \end{aligned}$$

com $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Considerando $c_3 = c_4 = 0$ e $x > 0$, segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned} y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\ &= -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}e^x + \frac{2}{3}x^2\sqrt{x}e^x \\ &= \frac{4}{15}x^2\sqrt{x}e^x \end{aligned}$$

Exercício 4 Usando **frações parciais**, observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \frac{s^3 - 1}{(s+2)^2(s^2-9)} &= \frac{9}{5} \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{96}{25} \frac{1}{s+2} + \\ &+ \frac{13}{75} \frac{1}{s-3} + \frac{14}{3} \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3 - 1}{(s+2)^2(s^2-9)} \right\} &= \frac{9}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} - \\ &- \frac{96}{25} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+2} \right\} + \\ &+ \frac{13}{75} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-3} \right\} + \\ &+ \frac{14}{3} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+3} \right\} \\ &= \frac{9}{5} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+2)^2} \right\} - \\ &- \frac{96}{25} e^{-2t} + \frac{13}{75} e^{3t} + \\ &+ \frac{14}{3} e^{-3t} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^3 - 1}{(s+2)^2(s^2-9)} \right\} = \frac{9}{5} t e^{-2t} - \frac{96}{25} e^{-2t} + \frac{13}{75} e^{3t} + \frac{14}{3} e^{-3t}$$

Exercício 5 Observe que $x = 0$ é um ponto **singular regular** da edo

$$4x^2 y'' + 2xy' + (x-2)y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$\begin{aligned}
 4x^2y'' + 2xy' + (x-2)y &= 0 \Rightarrow \\
 4x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \\
 + 2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} + \\
 + (x-2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} &= 0 \Rightarrow \\
 \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \\
 + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^{n+r} + \\
 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+r} &= 0 \Rightarrow \\
 x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \right. \\
 \left. + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \right] &= 0 \Rightarrow \\
 \sum_{n=0}^{\infty} 4(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \\
 + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)a_n x^n + \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n &= 0 \Rightarrow \\
 4r(r-1)a_0 + 2ra_0 - 2a_0 + \\
 + \sum_{n=1}^{\infty} [4(n+r)(n+r-1)a_n + \\
 + 2(n+r)a_n - 2a_n + a_{n-1}] x^n &= 0
 \end{aligned}$$

Portanto, a equação indicial é dada por

$$\begin{aligned}
 [4r(r-1) + 2r - 2]a_0 &= 0 \Rightarrow \\
 2r^2 - r - 1 &= 0
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$r = 1 \text{ ou } r = -\frac{1}{2}$$

Além disto, tem-se também que

$$[4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r) - 2]a_n + a_{n-1} = 0$$

donde segue-se a seguinte **relação de recorrência**

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{4(n+r)(n+r-1) + 2(n+r) - 2}$$

Para $r = 1$, tal relação torna-se

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n(2n+3)}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$a_1 = -\frac{1}{10}$$

$$a_2 = \frac{1}{280}$$

$$a_3 = -\frac{1}{15120}$$

$$a_4 = \frac{1}{1330560}$$

$$a_5 = -\frac{1}{172972800}$$

e, uma solução da equação dada é

$$\begin{aligned}
 y_1 = x - \frac{x^2}{10} + \frac{x^3}{280} - \frac{x^4}{15120} + \\
 + \frac{x^5}{1330560} - \frac{x^6}{172972800} + \dots
 \end{aligned}$$

■