Universidade Federal do Vale do São Francisco
Engenharia Civil
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof$^{\text{o}}$. Edson

2º Semestre

Gabarito 3ª Prova **2025**
Data: Domingo, 14 de Dezembro **Turma E4**

Exercício 1 *Observe que o termo geral desta série é dado por*

$$a_n = \left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n (x-4)^{4n}$$

Assim,

$$|a_n| = \left|\left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n (x-4)^{4n}\right|$$
$$= \left|\left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n\right| \left|(x-4)^{4n}\right|$$
$$= \left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n |x-4|^{4n}$$

*Usando o **teste da raíz**, tem-se que,*

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n |x-4|^{4n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+5}{3n+1}\right)^n} \sqrt[n]{|x-4|^{4n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+5}{3n+1}\right) |x-4|^4$$
$$= |x-4|^4 \lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{3n+1}$$
$$= \frac{1}{3} |x-4|^4$$

*e a série será **convergente** quando $L < 1$, ou seja*

$$\tfrac{1}{3}|x-4|^4 < 1 \Rightarrow$$
$$|x-4|^4 < 3 \Rightarrow$$
$$|x-4| < \sqrt[4]{3} \Rightarrow$$
$$-\sqrt[4]{3} < x-4 < \sqrt[4]{3} \Rightarrow$$
$$-\sqrt[4]{3}+4 < x < \sqrt[4]{3}+4$$

*Ou seja, o **intervalo de convergência** da série é* $\left(-\sqrt[4]{3}+4, \sqrt[4]{3}+4\right)$ ■

Exercício 2 *Observe que $x = 0$ é um **ponto ordinário** da **edo***

$$y'' + x^2y' - 2xy = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$y'' + x^2y' + 2xy = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ +x^2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} - \\ +2x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n+1} - \\ +\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=-1}^{\infty} (n+3)(n+2)a_{n+3} x^{n+1} + \\ +\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n+1} + \\ +\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+1} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2a_2 + (6a_3 + 2a_0)\,x + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)\,a_n\right] x^{n+1} = 0$$

Logo,

$$\begin{cases} 2a_2 = 0 \\ 6a_3 + 2a_0 = 0 \\ (n+3)(n+2)a_{n+3} + (n+2)\,a_n = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a_2 = 0 \\ a_3 = -\dfrac{1}{3}a_0 \\ a_{n+3} = \dfrac{-a_n}{n+3} \end{cases}$$

Supondo agora $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$, tem-se,

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = -\frac{1}{3}$$

$$a_4 = 0$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{18}$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_1 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{18}x^6 + \cdots$$

Supondo agora $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$, tem-se,

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4}$$

$$a_5 = 0$$

$$a_6 = 0$$

$$\cdots$$

Ou seja,

$$y_2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + \cdots$$

$$= x - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

e a solução geral da equação é

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. ■

Exercício 3 *Observe que $x = 0$ é um ponto* ***singular regular*** *da* ***edo***

$$2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\,y = 0$$

Portanto, considere a seguinte proposta de solução

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

Segue-se disto, que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2}$$

Substituindo na equação dada, obtem-se

$$2x^2 y'' + xy' - (3x+1)\,y = 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r-2} + \\ + x\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r-1} - \\ - (3x+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^{n+r} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^{n+r} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+r+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n - \\ -\sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)a_n x^n - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^{n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[2r(r-1)+r-1]\,a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n+r)(n+r-1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)a_n x^n - \\ -\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n-1} x^{n} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \Rightarrow$$

$$[2r(r-1)+r-1]\,a_0 + \\ \sum_{n=1}^{\infty}\{[2(n+r)(n+r-1)+ \\ +(n+r)-1]\,a_n - 3a_{n-1}\}\,x^n = 0$$

Portanto, a ***equação indicial*** *é dada por*

$$2r(r-1)+r-1=0$$

ou seja,

$$r = 1 \, ou \, r = -\frac{1}{2}$$

Além disto, tem-se também que

$$[2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1]\,a_n - 3a_{n-1}$$

donde segue-se a seguinte ***relação de recorrência***

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{2(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1}$$

Para $r=1$, tal relação torna-se

$$a_n = \frac{3a_{n-1}}{(2n+3)\,n}$$

Supondo $a_0 = 1$, tem-se

$$a_1 = \frac{3}{5}$$
$$a_2 = \frac{9}{70}$$
$$a_3 = \frac{1}{70}$$
$$a_4 = \frac{3}{3080}$$
$$a_5 = \frac{9}{200.200}$$

e, uma solução da equação dada é

$$y_1 = x^r\left(a_0 + a_1 x + \cdots + a_5 x^5 + \cdots\right) \\ = x + \frac{3x^2}{5} + \frac{9x^3}{70} + \frac{x^4}{70} + \frac{3x^5}{3080} + \frac{9x^6}{200.200} + \cdots$$

■

Exercício 4 *Usando* ***frações parciais****, tem-se que*

$$\frac{s^2-5s+16}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{6}{s-1} - \frac{10}{s-2} + \frac{5}{s-3}$$

Ou seja

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-5s+16}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\} = 6\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \\ -10\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \\ +5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} - \\ = 6e^t - 10e^{2t} + 5e^{3t}$$

■

Exercício 5 *Utilizando a* ***Transformada de Laplace*** *para a resolução desta equação, observe que*

$$\mathcal{L}\{y'' - 5y' + 6y\} = \mathcal{L}\{12e^t\} \quad \Leftrightarrow \\ \mathcal{L}\{y''\} - 5\mathcal{L}\{y'\} + 6\mathcal{L}\{y\} = 12\mathcal{L}\{e^t\}$$

Considerando

$$Y = \mathcal{L}\{y\},$$

a equação anterior pode ser reescrita como

$$s^2Y - sy(0) - y'(0) - 5[sY - y(0)] + 6Y = \frac{12}{s-1}$$

Ou seja,

$$\left(s^2 - 5s + 6\right) Y - s + 4 = \frac{12}{s-1} \qquad \Rightarrow$$

$$(s-2)\,(s-3)Y = s - 4 + \frac{12}{s-1} \qquad \Rightarrow$$

$$Y = \frac{s^2 - 5s + 16}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\{Y\} \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2 - 5s + 16}{(s-1)(s-2)(s-3)}\right\} \\ &= 6e^t - 10e^{2t} + 5e^{3t} \end{aligned}$$

$\blacksquare$