

Universidade Federal do Vale do São Francisco  
Engenharia Civil  
Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof<sup>o</sup>. Edson

2<sup>o</sup> Semestre

Gabarito 2<sup>a</sup> Prova  
Data: Segunda-feira, 3 de Novembro

2025  
Turma E4

**Exercício 1** Observe que a equação

$$xy'' + 2y' + xy = 0,$$

pode ser reescrita em sua **forma padrão** da seguinte forma,

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$$

Considere então,

$$P(x) = \frac{2}{x}$$

Deseja-se encontrar uma outra solução desta equação sabendo que

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$

é uma solução. Usando da **redução de ordem**, considere

$$\eta(x) = \int -P(x)dx$$

$$= \int -\frac{2}{x}dx$$

$$= -2\ln|x| + c_0, \quad c_0 \in \mathbb{R}$$

Tomando  $c_0 = 0$ , segue-se que

$$\mu(x) = e^{\eta(x)}$$

$$= e^{-2\ln|x|}$$

$$= e^{\ln|x|^{-2}}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$

Logo,

$$u(x) = \int \frac{\mu(x)}{y_1^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{x^2} \frac{x^2}{\sin^2 x} dx$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x}$$

$$= \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$

$$= -\cotg x + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Tomando  $c_1 = 0$ , tem-se,

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

$$= -\cotg x \frac{\sin x}{x}$$

$$= -\frac{\cos x \sin x}{\sin x \, x}$$

$$= -\frac{\cos x}{x}$$

■

**Exercício 2** Perceba que a equação dada,

$$y''' - 6y'' + 13y' - 20y = 0$$

possui equação auxiliar dada por

$$m^3 - 6m^2 + 13m - 20 = 0$$

Observe que

$$m_1 = 4,$$

é uma solução desta equação e além disto,

$$m^3 - 6m^2 + 13m - 20 = (m - 4)(m^2 - 2m + 5)$$

Logo, as demais soluções da equação auxiliar são obtidas como solução de

$$m^2 - 2m + 5 = 0$$

Ou seja,

$$m_2 = 1 + 2i$$

$$m_3 = 1 - 2i$$

Donde segue-se que

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

Assim, o conjunto fundamental de soluções da equação diferencial em questão é

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{m_1 x} \\ &= e^{4x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\alpha x} \cos \beta x \\ &= e^x \cos 2x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_3 &= e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x \\ &= e^x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

Logo, a solução geral da equação é

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 \\ &= c_1 e^{4x} + c_2 e^x \cos 2x + c_3 e^x \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

com  $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ . ■

**Exercício 3** Para encontrar uma solução particular da equação diferencial

$$y'' + 6y' + 10y = -2e^{-3x} \cos x$$

considere como proposta de solução a função

$$y_p = (A \cos x + B \operatorname{sen} x) x e^{-3x}$$

e observe que

$$\begin{aligned} y'_p &= [A \cos x + B \operatorname{sen} x + (-3A + B) x \cos x - \\ &\quad - (A + 3B) x \operatorname{sen} x] e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y''_p &= 2[(B - 3A) \cos x - (A + 3B) \operatorname{sen} x + \\ &\quad + (4A - 3B) x \cos x + (3A + 4B) x \operatorname{sen} x] e^{-3x} \end{aligned}$$

Substituindo na equação, tem-se

$$y''_p + 6y'_p + 10y_p = -2e^{-3x} \cos x$$

$$\begin{aligned} &2[(B - 3A) \cos x - \\ &\quad - (A + 3B) \operatorname{sen} x + \\ &\quad + (4A - 3B) x \cos x + \\ &\quad (3A + 4B) x \operatorname{sen} x] e^{-3x} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &6[A \cos x + B \operatorname{sen} x + \\ &\quad + (-3A + B) x \cos x - \\ &\quad - (A + 3B) x \operatorname{sen} x] e^{-3x} + \end{aligned}$$

$$10(A \cos x + B \operatorname{sen} x) x e^{-3x} = -2e^{-3x} \cos x \Rightarrow$$

Ou seja

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases}$$

e,

$$y_p = -x \operatorname{sen} x e^{-3x}$$

■

**Exercício 4** Observe inicialmente que a equação homogênea associada é dada por

$$y'' + 2y + y = 0$$

cujas equação auxiliar é dada por

$$m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -1$$

ou seja

$$y_1 = e^{-x}$$

$$y_2 = x e^{-x}$$

e a solução complementar é

$$\begin{aligned} y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\ &= c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} \\ &= (c_1 + c_2 x) e^{-x} \end{aligned}$$

com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Usando agora o método da variação dos parâmetros para encontrar uma solução particular, segue-se que

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x) e^{-x} \end{vmatrix} \\ &= e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y'_2 \end{vmatrix}, f(x) = \frac{e^{-x}}{x^4} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ \frac{e^{-x}}{x^4} & \dots \end{vmatrix} \\ &= -\frac{e^{-2x}}{x^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ \dots & \frac{e^{-x}}{x^4} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^4}
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 u_1' &= \frac{W_1}{W} \\
 &= -\frac{e^{-2x}}{x^3} \frac{1}{e^{2x}} \\
 &= -\frac{1}{x^3} \\
 u_2' &= \frac{W_2}{W} \\
 &= \frac{e^{-2x}}{x^4} \frac{1}{e^{-2x}} \\
 &= \frac{1}{x^4}
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int u_1' dx \\
 &= -\int \frac{1}{x^3} dx \\
 &= \frac{1}{2x^2} + c_3 \\
 u_2 &= \int u_2' dx \\
 &= \int \frac{1}{x^4} dx \\
 &= -\frac{1}{3x^3} + c_4
 \end{aligned}$$

com  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ . Considerando  $c_3 = c_4 = 0$ , segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned}
 y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\
 &= \frac{e^{-x}}{2x^2} - \frac{e^{-x}}{3x^2} \\
 &= \frac{e^{-x}}{6x^2}
 \end{aligned}$$

Assim, a solução geral da equação é dada por

$$\begin{aligned}
 y &= y_c + y_p \\
 &= (c_1 + c_2 x) e^{-x} + \frac{e^{-x}}{6x^2} \\
 &= \left( c_1 + c_2 x + \frac{1}{6x^2} \right) e^{-x}
 \end{aligned}$$

■

**Exercício 5** Observe que a equação dada

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$$

possui equação homogênea associada dada por

$$x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$$

que é uma **Equação de Cauchy-Euler**, cuja equação característica é

$$m^2 + 3m + 2 = 0,$$

cujas raízes são

$$\begin{aligned}
 m_1 &= -1 \\
 m_2 &= -2
 \end{aligned}$$

Donde segue-se que

$$\begin{aligned}
 y_1 &= x^{-1} \\
 y_2 &= x^{-2}
 \end{aligned}$$

e a **solução complementar** da equação dada é

$$\begin{aligned}
 y_c &= c_1 y_1 + c_2 y_2 \\
 &= c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Usando o **método da variação dos parâmetros**, para encontrar uma **solução particular**, observe que

$$\begin{aligned}
 W &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x^{-1} & x^{-2} \\ -x^{-2} & -2x^{-3} \end{vmatrix} \\
 &= -x^{-4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f & y_2' \end{vmatrix}, f(x) = \frac{e^x}{x^2} \\
 &= \begin{vmatrix} 0 & x^{-2} \\ \frac{e^x}{x^2} & \dots \end{vmatrix} \\
 &= -\frac{e^x}{x^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x^{-1} & 0 \\ \dots & \frac{e^x}{x^2} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{e^x}{x^3}
 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
 u_1' &= \frac{W_1}{W} \\
 &= -\frac{e^x}{x^4} \frac{1}{-x^{-4}} \\
 &= e^x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2' &= \frac{W_2}{W} \\
 &= \frac{e^x}{x^3} \frac{1}{-x^{-4}} \\
 &= -xe^x
 \end{aligned}$$

Ou seja

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int u_1' dx \\
 &= \int e^x dx \\
 &= e^x + c_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \int u_2' dx \\
 &= \int -xe^x dx \\
 &= (1-x)e^x + c_4
 \end{aligned}$$

com  $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ . Considerando  $c_3 = c_4 = 0$ , segue-se que, uma **solução particular** da equação é

$$\begin{aligned}
 y_p &= y_1 u_1 + y_2 u_2 \\
 &= x^{-1} e^x + x^{-2} (1-x) e^x \\
 &= \frac{e^x}{x^2}
 \end{aligned}$$

Por fim, a solução geral do problema é dada por

$$\begin{aligned}
 y &= y_c + y_p \\
 &= \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{e^x}{x^2}
 \end{aligned}$$

■